Devoir maison n°7

A rendre le 25/01

Vous pouvez rendre une copie pour deux si et seulement si chacun participe à la recherche ET à la rédaction.

Exercice 1

Soient $\alpha, \beta \in [0,+\infty]$. On considère les intégrales $I = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{t^\alpha |\ln(t)|^\beta} \mathrm{d}t$ et $J = \int_2^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha \ln(t)^\beta} \mathrm{d}t$.

1. Dans le cas $\alpha > 1$, montrer que I diverge et que J converge.
2. Dans le cas $\alpha < 1$, déterminer la nature de I et J.
3. Dans le cas $\alpha = 1$, déterminer la nature de I et J suivant la valeur de β.
   Indication : on pourra donner la valeur de ces intégrales.

Exercice 2

Théorème de Napoléon Soient A, B, C trois points non alignés du plan tels que le triangle ABC est direct (on lit les points dans le sens trigonométrique, ou encore $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \in]0,\pi[$). On définit les points D, E, F par : ADB, BEC et CFA sont équilatéraux directs.

Dans tout l'exercice ; on se place dans un repère orthonormé direct $\mathcal{R} = (O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ qui permet d'identifier le plan et $\mathbb{R}^2$.

1. Faire une schéma de la situation. On prendra le triangle ABC non équilatéral au minimum...
2. Rappeler l'expression de la matrice R_θ de rotation d'angle $\theta \in \mathbb{R}$ et étudier ses valeurs propres en fonction de la valeur de θ.
3. On pose $M = R_{\frac{\pi}{3}}$. On pourra noter que $\overrightarrow{AB} = B - A$ en identifiant les points et les vecteurs à des éléments de $\mathbb{R}^2$.
   Traduire, en utilisant M, le fait que ADB, BEC et CFA sont équilatéraux directs. Exprimer ensuite D, E, F en fonction de A, B, C et M.
4. Montrer que $M^3 = -I_2$ et, après avoir factorisé $M^3 + I_2^3$, que $M^2 - M + I_2 = 0$.
5. On rappelle que centre de gravité d'un triangle ABC est le point $\frac{A+B+C}{3}$. On note P, Q et R les centres de gravité respectifs de ADB, BEC et CFA.
   Montrer que PQR est équilatéral direct.
6. Montrer que PQR, DEF et ABC ont même centres de gravité.