

Table des matières

I Continuité 1
 I.1 Notions de topologie 1
 I.2 Fonctions continues 2
II Dérivées partielles 3
 II.1 Dérivabilité 3
 II.2 Taylor-Young 4
 II.3 Extrema 5
 II.4 Equations aux dérivées partielles 6

I Continuité

On fixe deux entiers naturels $p, n \geq 1$ qui valent 1, 2 ou 3 en pratique.

I.1 Notions de topologie

I.1.1 Définition

Soit $r \in [0, +\infty[$ et $X_0 \in \mathbb{R}^p$

1. La boule ouverte de rayon r et de centre X_0 est $B(X_0, r) = \{X \in \mathbb{R}^p \mid \|X_0 - X\| < r\}$.
2. La boule fermée de rayon r et de centre X_0 est $\overline{B}(X_0, r) = \{X \in \mathbb{R}^p \mid \|X_0 - X\| \leq r\}$.

I.1.2 Illustration

Lien avec la forme du domaine de convergence d’une série entière.

I.1.3 Définition-Proposition

Soit A une partie de \mathbb{R}^p . Les propositions suivantes sont équivalentes.

1. il existe $X_0 \in \mathbb{R}^p$ et $r > 0$ tels que $A \subset \overline{B}(X_0, r)$.
2. pour tout $X_0 \in \mathbb{R}^p$ il existe $r > 0$ tel que $A \subset \overline{B}(X_0, r)$.
3. il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que $\forall X \in A \ \|X\| \leq M$.

Dans ce cas, on dit que A est une partie **bornée** de \mathbb{R}^p .

Preuve.

- $1 \Rightarrow 2$. On note X_0 et r_0 les objets dont l’existence est assurée par 1.

Soit $X_1 \in \mathbb{R}^p$. On doit trouver $r_1 > 0$ tel que $A \subset \overline{B}(X_1, r_1)$. Or, pour $X \in A$ on a déjà $\|X_0 - X\| \leq r_0$.

Alors $\|X_1 - X\| = \|X_1 - X_0 + (X_0 - X)\| \leq \|X_1 - X_0\| + \|X_0 - X\| = \|X_1 - X_0\| + r_0$. Comme $\|X_1 - X_0\|$ ne dépend pas de X , on peut poser la constante $r_1 = \|X_1 - X_0\| + r_0$ qui convient.

- $2 \Rightarrow 3$. Il suffit d’appliquer 2 à $X_0 = 0_{\mathbb{R}^p}$ et alors $M = r$ convient.

- $3 \Rightarrow 1$. De même, $X_0 = 0$ et $r = M + 1$ conviennent. ■

1

I.1.4 Exemple

Toute boule ouverte ou fermée est bornée.

$A = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4 \right\}$ est bornée, $B = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq 1 \right\}$ n’est pas bornée.

I.1.5 Définition

Soit A une partie de \mathbb{R}^p .

1. On dit que A est une partie **ouverte** de \mathbb{R}^p (on dit aussi que A est un ouvert) ssi

$$\forall X_0 \in A \exists r > 0 \ B(X_0, r) \subset A$$

2. On dit que A est une partie **fermée** de \mathbb{R}^p ssi \overline{A} (son complémentaire) est une partie ouverte.

I.1.6 Exemple

Toute boule ouverte est un ouvert.

Toute boule fermée est un fermé.

Une couronne ouverte, \mathbb{R}^p sont des ouverts.

Le demi-plan $y > 0$ est un ouvert.

I.1.7 Interprétation intuitive

Dans un ouvert A , on peut toujours se placer “suffisamment proche” d’un point et rester dans A . Très pratique pour parler d’une fonction définie sur A .

Une première approche est de voir que pour un ouvert la “frontière” est exclue alors qu’elle est incluse dans un fermé.

I.1.8 Définition

Soit A une partie de \mathbb{R}^p et $X_0 \in \mathbb{R}^p$.

1. On dit que X_0 est un point intérieur à A ssi $\exists r > 0 \ B(X_0, r) \subset A$. En particulier $X_0 \in A$.
2. On dit que X_0 est un point extérieur à A ssi $\exists r > 0 \ B(X_0, r) \subset \mathbb{R}^p \setminus A$. En particulier $X_0 \notin A$ et X_0 est un point du complémentaire de A .
3. On dit que X_0 est un point adhérent à A ssi $\forall r > 0 \ B(X_0, r) \cap A \neq \emptyset$. Cette fois on a pas forcément $X_0 \in A$. Par contre X_0 n’est pas extérieur à A .
4. On dit que X_0 est un point frontière de A ssi X_0 est à la fois adhérent et pas intérieur à A , ou encore pour tout $r > 0$, la boule ouverte $B(X_0, r)$ a un intersection non vide avec l’intérieur et l’extérieur de A .

I.1.9 Illustration graphique

Tracer les différents ensembles pour A la boule unité qui ne contient qu'une demi-frontière : $A = B(0, 1) \cup \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0 \text{ et } x^2 + y^2 = 1 \right\}$.

I.1.10 Proposition

Soit A une partie non vide de \mathbb{R}^p . On note $B = \mathbb{R}^p \setminus A$ le complémentaire de A . Soit $X_0 \in \mathbb{R}^p$

1. X_0 est intérieur à A ssi X_0 n'est pas adhérent à B .
2. X_0 est adhérent à A ssi X_0 n'est pas intérieur à B .
3. A est ouvert ssi tout point de A est intérieur à A .
4. A est fermé ssi tout point adhérent à A est un point de A .
5. Tout point de A est adhérent à A .
6. Tout point intérieur à A est un point de A .

Preuve.

Simple jeu avec les définitions. Bon exercice théorique pour vérifier la connaissance de celles-ci. ■

I.2 Fonctions continues

I.2.1 Représentation graphique

On considère une fonction $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ où $A \subset \mathbb{R}^2$. Alors on peut considérer l'ensemble des points de l'espace vérifiant l'équation $z = f(x, y)$. Il s'agit de la surface représentative de f .

I.2.2 Définition

Soit A une partie de \mathbb{R}^p et $f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$. Soit $\ell \in \mathbb{R}^n$.

1. Soit a un point adhérent à A . On dit que f admet ℓ comme limite en a ssi

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \alpha > 0 \forall x \in A \|x - a\| \leq \alpha \Rightarrow \|f(x) - \ell\| \leq \varepsilon$$

Il faut comprendre $\|x - a\|$ comme la norme dans \mathbb{R}^p et $\|f(x) - \ell\|$ comme la norme dans \mathbb{R}^n .

2. Soit $a \in A$. On dit que f est continue en a ssi

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \alpha > 0 \forall x \in A \|x - a\| \leq \alpha \Rightarrow \|f(x) - f(a)\| \leq \varepsilon$$

f est **continue** sur A ssi f est continue en tout point de A .

I.2.3 Théorème

Soit $f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ où $A \subset \mathbb{R}^p$.

1. On note $f = (f_1, \dots, f_n)$ les fonctions coordonnées de f . f est continue (en un point ou sur A) si et seulement si toutes les f_i sont continues.
2. Une somme de fonctions continues est continue, le produit d'une fonction continue par un réel est continue ($\mathcal{C}(A, \mathbb{R}^n)$ est un \mathbb{R} -espace vectoriel)
3. Si $n = 1$ (fonctions à valeurs réelles), le produit de deux fonctions continues est encore continue. L'inverse d'une fonction continue qui ne s'annule pas est continue.
4. Soit $g : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ telle que $f(A) \subset U$. Si f et g sont continues alors $g \circ f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ est continue sur A .

Preuve.

Reprendre les preuves de 1ère année en adaptant les notations. ■

I.2.4 Exemple

On considère des fonctions de deux variables.

1. $(x, y) \mapsto x$ est continue.
2. $(x, y) \mapsto y$ est continue.
3. $(x, y) \mapsto x^2 + xy + 3xy^4$ est continue (par produits et sommes) et plus généralement toute fonction polynomiale en x, y est continue.
4. $(x, y) \mapsto \sin(xy)$ est continue par composition.

I.2.5 Applications partielles

Soit $A \subset \mathbb{R}^p$, $a = (a_1, \dots, a_p) \in A$.

Les applications partielles de f en a sont les fonctions $f_{a,i} : t \mapsto f(a_1, \dots, a_{i-1}, t, a_{i+1}, \dots, a_p)$ (on fixe toutes les variables sauf la i ème) définie partout où c'est possible.

SI f est continue en a alors toutes les f_i sont continues en a_i . La réciproque est fautive,

on peut montrer que $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \end{cases}$ n'est pas continue en $(0, 0)$ pourtant les deux applications partielles sont nulles donc continue sur \mathbb{R} .

Indication : On se place sur l'arc paramétré $x(t) = t, y(t) = t^2$ et on fait tendre t vers 0 : on se place arbitrairement près de $(0, 0)$ mais f prend des valeurs arbitrairement grande.

I.2.6 Théorème (Image d'un fermé borné)
 Soit $A \subset \mathbb{R}^p$ fermée et bornée et $f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$

1. Si f est continue sur A , alors $f(A)$ est une partie fermée et bornée de \mathbb{R}^n .
2. Si $n = 1$ et que $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ est continue, alors f est bornée et atteint ses bornes :
 $\inf_{x \in A} (f(x)) = \min_{x \in A} (f(x))$ et $\sup_{x \in A} (f(x)) = \max_{x \in A} (f(x))$.

Preuve.

Totalement hors programme.

Posons $B = f(A)$. On veut montrer que B est bornée. Par l'absurde, supposons que B n'est pas bornée

— $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \exists y_n \in B \ \|y_n\| \geq n$.

On peut ainsi créer une suite $(y_n) \in B$ telle que $\|y_n\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$. Or, par définition, chaque y_n possède au moins un antécédent dans A . On en choisit un que l'on note x_n . Alors (x_n) est une suite d'éléments de A qui est borné et on peut alors (théorème de Bolzano-Weierstrass, appliqué p fois successivement), extraire une suite $(x_{\varphi(n)})$ qui converge vers $x \in \mathbb{R}^p$.

— Montrons que le fait que A est fermé implique que $x \in A$. Déjà, x n'est pas extérieur à A car si on avait $r > 0$ tel que $B(x, r) \cap A = \emptyset$ alors $\|x_n - x\| > r$ pour tout n ce qui contredit $x_n \rightarrow x$. Ainsi x est intérieur à A d'après I.1.10. D'après cette même proposition et comme A est fermé, $x \in A$.

— Maintenant on a $(x_{\varphi(n)}) \in A^{\mathbb{N}}$ qui converge vers $x \in A$ et comme f est continue, $f(x_{\varphi(n)}) \xrightarrow{+\infty} f(x) \in B$. En posant $y = f(x)$ on a deux choses :

$\|y_n\| \xrightarrow{+\infty} +\infty$ par construction et $\|y_{\varphi(n)}\| \xrightarrow{+\infty} \|y\|$ par continuité de la norme (cette continuité est vraie par produits, sommes puis composition par $\sqrt{\cdot}$).

— Contradiction

Ainsi B est borné. Montrons maintenant que B est fermé, c'est à dire que tout point adhérent de B est un point de B .

Soit b adhérent à B . Pour $n \in \mathbb{N}$ on a donc (avec $r = \frac{1}{n+1}$ dans la définition) $B(b, \frac{1}{n+1}) \cap B \neq \emptyset$. Notons b_n un élément de cette intersection. On a construit une suite (b_n) d'éléments de B telle que $\forall n \in \mathbb{N} \ \|b_n - b\| \leq \frac{1}{n+1}$ et donc $b_n \xrightarrow{+\infty} b$.

Comme précédemment, on construit une suite (a_n) telle que $f(a_n) = b_n$ pour tout n et on en extrait une suite qui converge vers $a \in A$. Alors par unicité de la limite, $b = f(a)$ et donc $b \in B$.

Finalement, B est bien fermé en plus d'être borné. ■

I.2.7 Remarque

Il s'agit de la version plusieurs variables du théorème important : l'image d'un segment par une application continue est un segment.

I.2.8 Exemple

Voici des exemples de parties fermées et bornées : $\overline{B}(a, r), [a, b] \times [c, d]$.

II Dérivées partielles

Ici, pour simplifier la rédaction, on fixe $p = 3$, il suffit d'enlever une variable pour retrouver le cas d'une fonction de deux variables.

II.1 Dérivabilité

II.1.1 Définition

Soit $f : \begin{cases} U \rightarrow \mathbb{R}^n \\ (x, y, z) \mapsto f(x, y, z) \end{cases}$ où $U \subset \mathbb{R}^p$. Soit $a = (a_0, y_0, z_0)$ un point **intérieur** à U .

On dit que f possède une dérivée partielle par rapport à x en $a = (x_0, y_0, z_0)$ ssi l'application partielle $x \mapsto (x, y_0, z_0)$ (qui est définie sur un intervalle centré en x car a est intérieur) est dérivable en x_0 . Ce nombre dérivé est alors noté $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)$ ou $\partial_1 f(x_0, y_0, z_0)$.

On définit de même $\frac{\partial f}{\partial y}$ et $\frac{\partial f}{\partial z}$.

II.1.2 Remarque

1. Il s'agit toujours de se ramener à une fonction d'une variable, en fixant les autres au point qui nous intéresse.
2. $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{h}$

II.1.3 Attention

Même si f est définie sur une partie fermée, on ne parle de la dérivabilité qu'à l'intérieur de A . On pourra rencontrer des fonctions continues sur $\overline{B}(0, 1)$ et dérivable seulement sur $B(0, 1)$.

II.1.4 Exemple

1. $f : (x, y, z) \mapsto \sin(2xy - yz)$.
2. $f : (x, y, z) \mapsto (x^2y + z, x^2 - y^2 + xz)$

II.1.5 Définition

Soit U un **ouvert** de \mathbb{R}^p et $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$. On dit que f est de classe \mathcal{C}^1 sur U ssi f possède 3 (ou 2) dérivées partielles sur U et que ces fonctions de 3 (ou 2) variables sont continues.

II.1.6 Exemple

Les fonctions précédentes sont de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^3

II.1.7 Définition

Soit $U \subset \mathbb{R}^p$ un ouvert et $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ (remarquez le cas $n = 1$). Si f possède des dérivées partielles en $(x, y, z) \in U$, le gradient de f en (x, y, z) (noté $\overrightarrow{\text{grad}} f(x, y, z)$) est le vecteur $\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z), \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) \right)$.

En physique, le gradient est parfois noté ∇f

II.1.8 Exemple

Calculer le gradient de la première fonction de l'exemple précédent. Attention à ne pas confondre avec les vecteurs obtenus en dérivant (partiellement) une fonction avec $n > 1$.

II.2 Taylor-Young**II.2.1 Théorème**

Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ un fonction \mathcal{C}^1 , où U est un ouvert de \mathbb{R}^2 . Soit $(x_0, y_0) \in U$. Pour (h, k) de norme "assez petite"

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + h \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + k \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + \underset{(h,k) \rightarrow (0,0)}{o}(\|(h, k)\|)$$

Preuve.

Admis. ■

II.2.2 Le petit o

Il s'agit ici d'une fonction de 2 variables $\varphi(h, k)$ telle que $\frac{\varphi(h, k)}{\|(h, k)\|} \underset{(h,k) \rightarrow (0,0)}{\rightarrow} 0_{\mathbb{R}^n}$.

II.2.3 Exemple

Ecrire la formule dans le cas de 3 variables.

II.2.4 Corollaire

Une fonction de classe \mathcal{C}^1 est continue.

II.2.5 Cas n = 1

Dans le cas où f est à valeurs réelles, on obtient $f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + \overrightarrow{\text{grad}} f(x_0, y_0) \cdot (h, k) + o(\|(h, k)\|)$.

II.2.6 Proposition (Composition)

Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ (U ouvert) et $g : t \mapsto (x(t), y(t), z(t))$ une fonction définie sur un intervalle I et à valeurs dans U .

Si f et g sont de classe \mathcal{C}^1 , alors $\varphi = f \circ g : t \mapsto f(x(t), y(t), z(t))$ est de classe \mathcal{C}^1 sur I et pour $t \in I$

$$\varphi'(t) = x'(t) \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t), z(t)) + y'(t) \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t), z(t)) + z'(t) \frac{\partial f}{\partial z}(x(t), y(t), z(t))$$

Preuve.

Il s'agit d'appliquer la formule de Taylor-Young à $\varphi(t+h) = f(x(t+h), y(t+h), z(t+h)) = f(x(t) + hx'(t) + o(h), y(t) + hy'(t) + o(h), z(t) + hz'(t) + o(h))$.

On lit la valeur de $\varphi'(t)$ comme facteur de h . ■

II.2.7 Exemple

On considère $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 et $g : t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$. Calculer la dérivée de $f \circ g$. (évolution d'un champ scalaire le long du cercle unité).

II.2.8 Proposition (Composition, changement de variables)

On considère $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $g : V \rightarrow \mathbb{R}^p$ où U est un ouvert de \mathbb{R}^p et V un ouvert de \mathbb{R}^m . Si $g(V) \subset U$ et que les fonctions f, g sont de classe \mathcal{C}^1 alors $f \circ g$ est de classe \mathcal{C}^1 sur V .

Si on note $f : (u_1, \dots, u_p) \mapsto f(u_1, \dots, u_p)$ et $g : (x_1, \dots, x_m) \mapsto g(x_1, \dots, x_m)$ et $g = (g_1, \dots, g_p)$ les fonctions coordonnées, alors $f \circ g$ dépend des variables x_1, \dots, x_m et pour $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$ et $a \in V$

$$\frac{\partial f \circ g}{\partial x_i}(a) = \sum_{j=1}^p \frac{\partial g_j}{\partial x_i}(a) \frac{\partial f}{\partial u_j}(g(a))$$

Preuve.

On dérive par rapport à une seule variable, que l'on peut noter t et on applique le théorème précédent. ■

II.2.9 En pratique

On note $\varphi : (x, y) \mapsto f(u(x, y), v(x, y))$. Alors $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) \frac{\partial f}{\partial u}(u(x, y), v(x, y)) + \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) \frac{\partial f}{\partial v}(u(x, y), v(x, y))$

II.2.10 Exemple

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ (variables notées x, y) de classe \mathcal{C}^1 . Calculer les dérivées de $\varphi : (r, \theta) \mapsto f(r \cos(\theta), r \sin(\theta))$.

On trouve $\frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) = \cos(\theta) \frac{\partial f}{\partial x}(r \cos \theta, r \sin \theta) + \sin(\theta) \frac{\partial f}{\partial y}(r \cos \theta, r \sin \theta)$ et $\frac{\partial g}{\partial \theta}(r, \theta) = -r \sin(\theta) \frac{\partial f}{\partial x}(r \cos \theta, r \sin \theta) + r \cos(\theta) \frac{\partial f}{\partial y}(r \cos \theta, r \sin \theta)$

II.2.11 Dérivées d'ordre supérieur

Comme pour les fonctions d'une variable, on peut évidemment continuer à dériver des dérivées partielles si elles sont encore dérivables.

La notation est la suivante :

$$\frac{\partial f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right), \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

II.2.12 Exemple

Soit $f : (x, y, z) \mapsto x \arctan(y^2 + z^2)$.

Calculer $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}$

II.2.13 Théorème (Théorème de Schwarz)

Si f est de classe \mathcal{C}^2 sur un ouvert U de \mathbb{R}^p , alors $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ (et de même avec toutes les autres variables éventuelles).

II.3 Extrema

Cette fois on suppose $p = 2$ pour alléger les notations. On peut tout à fait généraliser.

II.3.1 Définition

Soit $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction à valeurs réelles et $A \subset \mathbb{R}^2$. Soit $a_0 = (x_0, y_0) \in A$. On dit que f possède un maximum local (resp. minimum local) ssi il existe un $r > 0$ tel que

$$\forall (x, y) \in A \cap \overline{B}(a_0, r) \quad f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$$

(resp. $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$).

II.3.2 Exemple

Tracer la surface représentative de $f : (x, y) \mapsto \sqrt{1 - x^2 - y^2}$. Maximum local en $(0, 0)$. Minimum locaux sur le cercle unité.

II.3.3 Définition

Soit $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction à valeurs réelles et $A \subset \mathbb{R}^2$. Un point a **intérieur** à A est appelé **point critique** de f ssi $\overrightarrow{\text{grad}} f(a) = 0$ (toutes les dérivées partielles s'annulent simultanément)

II.3.4 Exemple

1. Cas des fonctions numériques : $f : x \mapsto x^3$.
2. Soient $a, b > 0$. Trouver les points critiques de $f : x \mapsto \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$

II.3.5 Proposition

Soit $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction à valeurs réelles et $A \subset \mathbb{R}^2$. Soit $a \in A$.

Si f possède un extremum local en a alors on est dans l'un des deux cas :

- a est sur la frontière de A
- a est intérieur à A et alors a est un point critique de f .

Preuve.

Notons $a = (x_0, y_0)$. On considère l'application partielle $f_{y_0} : x \mapsto f(x, y_0)$.

Si a est à l'intérieur de A , alors f_{y_0} est dérivable sur un intervalle ouvert et admet un extremum en x_0 qui n'est pas une borne. Donc sa dérivée s'annule en x_0 ie $\frac{\partial f}{\partial x}(a) = 0$.

On raisonne de même pour chaque dérivée partielle. ■

II.3.6 Exemple

$A = \overline{B}(O, 1)$ et $f : (x, y) \mapsto x^2 + 2y^2$.

II.4 Equations aux dérivées partielles

II.4.1 Exemple

On souhaite résoudre l'équation $\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = 1$. Pour cela on effectue le changement de variable $u = x + y, v = x - y$.

On a donc $x = \frac{u+v}{2}, y = \frac{u-v}{2}$. Ceci revient à poser une nouvelle fonction $g(u, v) = f(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}) = f(x, y)$.

Ainsi $\frac{\partial g}{\partial v}(u, v) = \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x}(u, v) - \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial y}(u, v) = \frac{1}{2}$. Ainsi g est une fonction constante si on ne considère que la variable v . Donc $g(u, v) = \frac{v}{2} + K(u)$ où K est une fonction de classe \mathcal{C}^1 qui ne dépend que de la variable u .

Finalement, les solutions sont de la forme $f(x, y) = \frac{x-y}{2} + K(x+y)$.

II.4.2 Exemple

Chercher les solutions f de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, +\infty[\times \mathbb{R}$ vérifiant (E) : $x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{x}$. Pour cela on pourra passer en coordonnées polaires.

On pose $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$. avec $r \in]0, +\infty[$ et $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. On a alors $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ et $\theta = \arctan(\frac{y}{x})$.

On pose $g(r, \theta) = f(x, y) = f(r \cos \theta, r \sin \theta)$. Alors $\frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) = \cos \theta \frac{\partial f}{\partial x}(r, \theta) + \sin \theta \frac{\partial f}{\partial y}(r, \theta)$.

Ainsi (E) devient $r \frac{\partial g}{\partial r} = \tan(\theta)$ ou encore $\frac{\partial g}{\partial r} = \frac{1}{r} \tan(\theta)$.

Ainsi $g(r, \theta) = \ln(r) \tan(\theta) + K(\theta)$ où K est une fonction \mathcal{C}^1 sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

Finalement, $f(x, y) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) \frac{y}{x} + C(\frac{y}{x})$. où C est une fonction \mathcal{C}^1 .

II.4.3 Exercice

Résoudre l'équation précédente par changement de variable $u = x$ et $v = \frac{y}{x}$.

II.4.4 Exemple

On considère l'équation de la chaleur $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$. c est une constante strictement positive représentant une vitesse de propagation. On travaille sur \mathbb{R}^2 .

Résoudre en posant $u = x + ct$ et $v = x - ct$ et calculer la dérivée d'ordre 2 croisée.

On a donc $g(u, v) = f(x, t) = f(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2c})$.

$\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} = 0$ et donc $\frac{\partial g}{\partial u} = K(u)$ et finalement $g(u, v) = K_1(u) + K_2(v)$.