**Géométrie du plan et de l'espace : révisions**

- Produit scalaire et déterminant dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$. Produit vectoriel dans $\mathbb{R}^3$.
- Droites du plan et de l'espace, plan dans l'espace : différentes représentations, passer de l'une à l'autre.
- Cercles dans le plan : équation, intersections.
- Matrices de rotation dans le plan ou dans l'espace (connaître la forme).

**Espaces euclidiens**

- Définition d'un produit scalaire, exemple dans $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}), \mathbb{R}[X], \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \mathbb{R}^n$.
- Norme et distance associées à un produit scalaire.
- Inégalités de Cauchy-Schwarz et triangulaire.
- Familles orthogonales et orthonormales, liberté de telles familles. Théorème de Pythagore.
- Coordonnées dans une base orthonormale, expression du produit scalaire en fonction des coordonnées dans une telle base.
- Orthonogolalisation de Gram-Schmidt.
- Espaces orthogonaux, supplémentaire orthogonal d'un sous espace de dimension fini. Projection et symétrie orthogonales.
- Calcul pratique d'une projection orthogonale sur $F$ : directement si on connaît une base orthonormée de $F$ ou alors en résolvant $p(x) \in F$ et $x - p(x) \perp F$.
- Application à la distance d'un vecteur à un sous-espace de dimension finie.
- Isométries : image d'une base orthonormée, composition et réciproque restent des isométries.
- Matrices orthogonales : savoir les reconnaître et exploiter le fait que $M^{-1} = {}^tM$.

**Questions de cours**

1. $\varphi : (f,g) \mapsto \int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t$ est un produit scalaire sur $E = \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$.
2. Si $\mathcal{B} = (e_1,\dots,e_n)$ est une base orthonormée de $E$ et $x, y \in E$ alors on a $x = \sum\limits_{k=1}^{n} (x|e_k)e_k$ et expression de $(x|y)$ en fonction des coordonnées dans $\mathcal{B}$.
3. Appliquer l'algorithme de Gram-Schmidt dans un espace de dimension 3.