Concours blanc : analyse

Durée : 4H. Calculatrices interdites. **Les candidats sont invités à porter une attention particulière à la rédaction et la propreté : les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.**

Lisez l'énoncé attentivement et en entier **AVANT** de commencer chaque exercice.

Exercice 1

Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$. Les X_i représentent la répétition d'une même expérience aléatoire : la ième expérience est un succès si et seulement si X_i prend la valeur 1.

Pour $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, on note $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$. On pose également $q = 1 - p$

1. Rappeler le développement en série entière de $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ ainsi que son domaine de convergence.
2. Montrer que pour $m \in \mathbb{N}$:
$$\forall x \in]-1,1[\ \frac{m!}{(1-x)^{m+1}} = \sum_{k=m}^{+\infty} \frac{k!}{(k-m)!} x^{k-m}$$
3. On fixe $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ pour le reste de l'exercice. Montrer que la série $\sum\limits_{k\geqslant n} \binom{k-1}{n-1} p^n q^{k-n}$ converge et que sa somme vaut 1.

   On peut maintenant définir une variable aléatoire Y_n à valeurs dans $\{n, n+1, \ldots\} = \mathbb{N} \cap [n, +\infty[$ par sa loi :
$$\forall k \geqslant n\ \mathbb{P}(Y_n = k) = \binom{k-1}{n-1} p^n q^{k-n}.$$
4. Reconnaître la loi de Y_1. Expliciter le coefficient binomial sous forme de quotient simple pour les lois de Y_2 et Y_3.
5. Expliquer rapidement pourquoi $S_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$. Pour $k \geqslant n$, calculer $\mathbb{P}(S_k = n \text{ et } S_{k-1} = n-1)$. Comment interpréter la loi de la variable Y_n ?
6. On pose Z_n la variable aléatoire dont la valeur est le nombre d'expérience nécessaire à l'obtention d'exactement n succès lors de notre répétition d'expérience (Z_n vaut le rang d'obtention du n-ème succès).
   (a) Quel est l'ensemble des valeurs possibles pour Z_n ?
   (b) Sans utiliser la question 5, et en effectuant un raisonnement par dénombrement, montrer que Z_n suit la même loi que Y_n.
7. On considère la série entière de variable t réelle $\sum\limits_{k\geqslant n} \mathbb{P}(Y_n = k) t^k$ et on note f_n sa somme.

   Calculer le rayon de convergence R de cette série entière, et montrer en particulier que $R > 1$.
8. Calculer $f_n(t)$ pour $t \in]-R, R[$.
9. Montrer que Y_n est d'espérance finie et calculer $E(Y_n)$. On pourra penser à dériver f_n.
10. En dérivant f_n une seconde fois, montrer que Y_n est de variance finie et calculer $V(Y_n)$.

Exercice 2 (Euler et comparses)

Partie I

Pour $a \in \mathbb{R}$, on note $\varphi_a : \left\{ \begin{array}{ccc}]0, \frac{\pi}{2}] & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & (\sin(t))^a \end{array} \right.$.

Dans les cas où l'intégrale converge, on note $f(a) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi_a(t)\mathrm{d}t = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(t))^a \mathrm{d}t$.

1. A quelle condition sur a l'intégrale définissant $f(a)$ est convergente ?
2. Montrer que f est une fonction décroissante sur $[0, +\infty[$.

   Dans la suite on note
$$W_n = f(n) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\mathrm{d}t$$
   pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. Calculer W_0, W_1.
4. Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}$, on a $W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n$.
5. Montrer que $W_n \underset{n\to+\infty}{\sim} W_{n+1}$.
6. Montrer que la suite définie par $u_n = (n+1)W_n W_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ est constante, et donner la valeur de cette constante.
7. En déduire que $W_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.
8. Montrer que, pour $p \in \mathbb{N}$, on a
$$W_{2p} = \frac{\binom{2p}{p}}{4^p}\frac{\pi}{2}.$$
9. En déduire un équivalent de $\binom{2p}{p}$ quand $p \to +\infty$.

Partie II

On pose maintenant $I = \int\limits_0^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t$ et $g : \left\{\begin{array}{ccc} [0, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \int\limits_0^x e^{-t^2}\mathrm{d}t \end{array}\right.$

1. Montrer que g possède une limite finie en $+\infty$. Quelle est la signification pour l'intégrale I ?
2. Montrer que $\forall u > -1 \ \ln(1+u) \leqslant u$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. Pour $t \in [0, n[$, montrer que
$$\left(1 - \frac{t^2}{n^2}\right)^{n^2} \leqslant e^{-t^2} \leqslant \left(1 + \frac{t^2}{n^2}\right)^{-n^2}.$$
L'inégalité est-elle encore vraie pour $t = n$?
4. On pose $J_n = \int\limits_0^n \left(1 - \frac{t^2}{n^2}\right)^{n^2} \mathrm{d}t$.
En effectuant le changement de variable $t = x\cos(u)$, montrer que $J_n = nf(2n^2+1)$ où f est la fonction définie dans la partie I.
5. On admet que $\int\limits_0^n \left(1 + \frac{t^2}{n^2}\right)^{-n^2} \mathrm{d}t \leqslant nf(2n^2-2)$. Donner un encadrement de $g(n)$, et utiliser la partie I pour montrer que $I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Partie III

On pose maintenant, pour $x > 0$, $G(x) = \int\limits_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t$.

1. Montrer que l'intégrale définissant $G(x)$ est convergente pour tout $x > 0$.
2. Calculer $G(1)$ et $G(\frac{1}{2})$. On pourra utiliser les résultats de la partie II.
3. Montrer que pour tout $x > 0$, $G(x+1) = xG(x)$.
4. En déduire la valeur de $G(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$.
5. Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}$ $G(n+\frac{1}{2}) = \frac{(2n)!}{4^n n!}\sqrt{\pi}$.
6. Donner un lien entre $G(n+\frac{1}{2}), G(n+1)$ et W_{2n} (défini en partie I).
En déduire que
$$G(n+1) \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{n}G(n+\frac{1}{2})$$
.

Partie IV

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose
$$a_n = \frac{n^n\sqrt{n}}{e^n n!} \text{ et } b_n = \ln(a_n).$$

1. Montrer que la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si la série $\sum\limits_{n>0}(b_n - b_{n-1})$ converge.
2. Rappeler le développement limité de $\ln(1+u)$ à l'ordre 3 en 0 et en déduire un développement de $(n+\frac{1}{2})\ln(1-\frac{1}{n})$ quand $n \to +\infty$.

3. En déduire un équivalent de $b_n - b_{n-1}$ quand $n \to +\infty$.
4. Montrer que la suite (b_n) converge puis que (a_n) converge vers une limite $\ell > 0$.
5. En notant que $a_n \underset{+\infty}{\sim} \ell$, donner un équivalent de $n!$ en fonction de ℓ.
6. En utilisant un équivalent établi dans l'une des parties précédentes, en déduire que $\ell = \sqrt{2\pi}$, puis donner un équivalent de $G(n + \frac{1}{2})$ quand $n \to +\infty$ (cette expression ne devra pas faire intervenir $n!$).