Espaces euclidiens

- Définition d'un produit scalaire, exemple dans $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}), \mathbb{R}[X], \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \mathbb{R}^n$.
- Norme et distance associées à un produit scalaire.
- Inégalités de Cauchy-Schwarz et triangulaire.
- Familles orthogonales et orthonormales, liberté de telles familles. Théorème de Pythagore.
- Coordonnées dans une base orthonormale, expression du produit scalaire en fonction des coordonnées dans une telle base.
- Orthonogolalisation de Gram-Schmidt.
- Espaces orthogonaux, supplémentaire orthogonal d'un sous espace de dimension fini. Projection et symétrie orthogonales.
- Calcul pratique d'une projection orthogonale sur F : directement si on connaît une base orthonormée de F ou alors en résolvant $p(x) \in F$ et $x - p(x) \perp F$.
- Application à la distance d'un vecteur à un sous-espace de dimension finie.
- Isométries : image d'une base orthonormée, composition et réciproque restent des isométries.
- Matrices orthogonales : savoir les reconnaître et exploiter le fait que $M^{-1} = {}^tM$.
- Description des isométries du plan et de l'espace.

Fonctions de plusieurs variables

- Ouverts et fermés de $\mathbb{R}^p$: définition et savoir les reconnaître intuitivement. Points intérieurs, extérieurs, adhérents, frontières.
- Continuité et dérivabilité des fonctions de 2 ou 3 variables (à valeurs dans $\mathbb{R}^n$), classe $\mathcal{C}^1$. L'étude de prolongement par continuité n'est pas un attendu.
- Gradient d'une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}$. Théorème de Taylor-Young et équation de plan tangents à une surface représentative.

Questions de cours

1. Si $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base orthonormée de E et $x, y \in E$ alors on a $x = \sum_{k=1}^{n} (x|e_k)e_k$ et expression de $(x|y)$ en fonction des coordonnées dans $\mathcal{B}$.
2. Appliquer l'algorithme de Gram-Schmidt dans un espace de dimension 3.
3. Su un exemple, reconnaître une matrice de réflexion ou de rotation dans l'espace et trouver ses éléments géométriques.