Exercice de Probabilités

On rappelle qu'une variable aléatoire X suit une loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$ si

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ \mathbb{P}(X = n) = p(1-p)^{n-1}.$$

1. Soit X une variable aléatoire de loi géométrique de paramètre p.
   (a) Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X > n)$.
   (b) Soit $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^\star}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi de Bernoulli de paramètre p. On note T le rang du 1er succès obtenu : $T = \inf\{k \geq 1,\ X_k = 1\}$. Montrer que T a même loi que X.
2. Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes de même loi géométrique de paramètre p.
   (a) Calculer la fonction génératrice de X puis de $X + Y$.
   (b) En déduire que pour tout $n \geq 2$, $\mathbb{P}(X + Y = n) = p^2(n-1)(1-p)^{n-2}$.
   (c) Déterminer, pour $n \geq 2$, la loi de X sachant $X + Y = n$.
3. On considère toujours X et Y deux variables aléatoires indépendantes de même loi géométrique de paramètre p. On pose $T = \max(X, Y)$ et $Z = \min(X, Y)$. On pose $q = 1 - p$.
   (a) Exprimer $X + Y$ et $|X - Y|$ en fonction de Z et T.
   (b) Montrer que $\mathbb{P}(X = Y) = \dfrac{p}{1+q}$.
   (c) Montrer que Z suit une loi géométrique de paramètre $1 - q^2$. On pourra caractériser la loi de Z par sa fonction de répartition.
   (d) Déterminer la loi de T.