

Exercice 1

1) Résoudre l'équation différentielle (E) $xy' + 2y = \frac{x}{x^2 + 1}$ sur \mathbb{R}_+^* et sur \mathbb{R}_-^* .

2) Soit h la fonction définie par $\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = \begin{cases} \frac{x - \text{Arctan}(x)}{x^2} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$ Montrer

que h est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} .

3) Montrer que (E) possède une unique solution f définie et de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} .

4) Calculer $\int_0^1 f(x)dx$.

Exercice 2

On considère l'équation (E) $(1 + x^2)y'' + xy' - y = 0$.

1. Déterminer une solution sur \mathbb{R} polynomiale.
2. Déterminer les solutions de (E).

Exercice 3

On considère l'équation différentielle (E) : $y'' - 2xy' - 2y = 0$.

1. Déterminer une fonction f solution de (E) sur \mathbb{R} et telle que $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$, sous forme de fonction développable en série entière.
2. Montrer que f ne s'annule pas.
3. Résoudre (E) sur \mathbb{R} .

Exercice 4

Résoudre $x^2y'' + 4xy' - (x^2 - 2)y = 0$ sur \mathbb{R}^{+*} et \mathbb{R}^{-*} puis sur \mathbb{R} .
(on pourra poser $z = x^2y$)

Exercice 5

Vérifier que la fonction $x \rightarrow (\arcsin x)^2$ est solution sur $] -1, 1[$ de l'équation différentielle

$$(1 - x^2) y''(x) - xy'(x) = 2.$$

En déduire que cette fonction est développable en série entière sur $] -1, 1[$ et déterminer son développement en série entière sur cet intervalle.

Exercice 6

Déterminer les solutions développables en série entière de l'équation différentielle

$$x^2(1 - x)y''(x) - x(1 + x)y'(x) + y(x) = 0.$$

Reconnaître les sommes des séries trouvées.

En déduire toutes les solutions de cette équation différentielle sur $\mathbb{R}^{-*},]0, 1[$ ou $]1, +\infty[$.

Exercice 7

On considère le système différentiel (S) : $\begin{cases} x' = 4x - 3y + 2z \\ y' = 6x - 5y + 4z \\ z' = 4x - 4y + 4z \end{cases}$, où x, y et z sont trois fonctions de la variable t , de classe \mathcal{C}^1 .

1. De quel type de système s'agit-il? Montrer que les trajectoires (les fonctions $t \mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ solutions) de (S) sont contenues dans des plans parallèles.
2. Déterminer la solution de (S) dont la trajectoire Γ passe par $M(1; 3; 3)$ à l'instant $t = 0$. Préciser une équation du plan qui la contient.

Exercice 8

Résoudre le système différentiel réel : $\begin{cases} y_1' = 2y_1 + y_2 - 2y_3 \\ y_2' = y_1 \\ y_3' = 2y_1 - y_3 \end{cases}$ et donner la solution au problème de Cauchy en $(0, (a, b, c))$.

Exercice 9

Résoudre (E) : $X'(t) = AX + B$ avec $A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} e^t \\ e^{2t} \\ -te^t \end{bmatrix}$.

Exercice 10

Résoudre le système différentiel réel : $\begin{cases} y_1' = 3y_1 + y_2 \\ y_2' = -y_1 + y_2 \end{cases}$ en posant $z_1 = y_1 + y_2$ et $z_2 = y_1 - y_2$.