Matrices symétriques

Exercice 1
Soit $(a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ une matrice symétrique réelle d'ordre n de valeurs propres $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ (comptées avec leur ordre de multiplicité). Montrer que $\sum\limits_{1\leq i,j\leq n} a_{ij}^2 = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k^2$.

Exercice 2
Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ telle que la matrice $B = A\,{}^tA - {}^tA\,A$ ait toutes ses valeurs propres positives. Montrer que $B = 0$.

Exercice 3
Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $B = A^3$. Montrer qu'il existe un polynôme P tel que $A = P(B)$.

Exercice 4
On appelle **rayon spectral** d'une matrice $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ le réel positif $\rho(M) = \max\limits_{\lambda \in sp(M)} |\lambda|$

Soit $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ étant identifié à $\mathbb{R}^n$ et muni de la norme euclidienne canonique $\|\cdot\|$

Montrer : $\sup\limits_{X\in\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})\setminus\{0\}} \dfrac{\|MX\|}{\|X\|} = \sqrt{\rho\left({}^tMM\right)}$

Indication : on montrera que ${}^tMM$ est diagonalisable à valeurs propres positives.

Exercice 5
Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ inversible telle que

$${}^tA = A^{-1} + I_n.$$

1. Montrer que ${}^tAA$ est diagonalisable.
2. En déduire que A est diagonalisable.
3. Déterminer un polynôme annulateur de A, c'est-à-dire un polynôme P tel que $P(A) = 0$.
4. On suppose que A n'est pas une homothétie. Déterminer le spectre de A.

Recherche d'extrema

Exercice 6
Déterminer les extrema locaux de $(x, y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \mapsto x \ln\left(x^2\right) + y^2$.

Exercice 7
1. Montrer que $(E) : e^{-x} = x$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$, que l'on notera x_0.
2. En déduire que $f : (x, y) \longmapsto x^2 - 2xy + 2y^2 + e^{-x}$ admet un unique extremum, dont on donnera la nature, atteint en un unique point dont on exprimera les coordonnées à l'aide de x_0.

Coniques

Exercice 8
Déterminer tous les éléments des coniques d'équation

$$x^2 + 8xy - 5y^2 - 21 = 0$$
$$9x^2 - 24xy + 16y^2 + 10x - 55y + 50 = 0$$
$$9x^3 + 4xy + +6y^2 + \alpha = 0$$

avec $\alpha = -20, 0, 20$.

Exercice 9
Soit A le point de coordonnée $(1, 0)$. On considère la parabole $\mathcal{P} : y^2 + x = 1$ et l'ellipse $\mathcal{E}$ d'équation $x^2 + 2y^2 = 1$.

Pour tout $m \neq 0$, on considère la droite $\Delta_m : y = m(1 - x)$ passant par A.

1. Représenter $\mathcal{P}$ et $\mathcal{E}$ sur un même graphique.
2. Δ_m coupe $\mathcal{P}$ en A et un autre point M et coupe $\mathcal{E}$ en A et un autre point N. Déterminer les coordonnées de M et N.
3. Déterminer des équations des tangentes en M et N à $\mathcal{P}$ et $\mathcal{E}$ respectivement. On pourra passer par une représentation paramétrique.
4. Ces deux tangentes s'intersectent en I_m. Déterminer le lieu des I_m lorsque m décrit $\mathbb{R}^*$.