Table des matières

Dans ce chapitre on rapporte l'espace usuel euclidien à $\mathbb{R}^3$ par le choix d'un repère orthonormé de référence $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ et on identifie les points avec leur colonne de coordonnées.

I Paramétrages

I.1 Courbes paramétrées

I.1.1 Définition

Une courbe paramétrée de l'espace est une fonction $f : t \mapsto M(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ définie sur un intervalle I non trivial.

Son **support** Γ est l'ensemble $\{M(t) | t \in I\} = f(I)$. C'est l'ensemble que l'on cherche à tracer ou étudier.

Si Γ est inclus dans un plan, on dira que f (ou abusivement Γ) est une courbe plane, sinon on dit que f est une courbe gauche.

I.1.2 Exemple

1. $\begin{cases} x(t) = \alpha + at \\ y(t) = \beta + bt \\ z(t) = \gamma + ct \end{cases}$ (définie sur $\mathbb{R}$) où $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \neq 0_{\mathbb{R}^3}$ et α, β, γ sont fixés est une courbe plane.
2. $\begin{cases} x(t) = \cos(t) \\ y(t) = \sin(t) \\ z(t) = t \end{cases}$ (définie sur $\mathbb{R}$) est une courbe gauche.

I.1.3 Définition-Proposition

Soit $f : t \mapsto M(t)$ une courbe paramétrée définie sur I, dérivable. On note Γ son support.

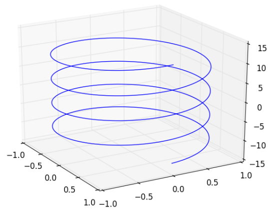
1. Pour $t_0 \in I$, le point $M(t_0)$ est dit **regulier** ssi $f'(t_0) \neq \vec{0}$.
2. Si $M(t_0)$ est régulier, la tangente à Γ en $M(t_0)$ est dirigée par $f'(t_0)$.

I.1.4 Remarque

Si Γ est plane, alors toutes ses tangentes son contenues dans le plan qui contient Γ.

I.1.5 Exemple

On reprend le deuxième exemple. $f : t \mapsto \begin{cases} x(t) = \cos(t) \\ y(t) = \sin(t) \\ z(t) = t \end{cases}$. Pour $t \in \mathbb{R}$ on note $f(t) = M(t)$ Pour $t_0 \in \mathbb{R}$, $f'(t_0) = \begin{pmatrix} -\sin(t_0) \\ \cos(t_0) \\ 1 \end{pmatrix} \neq 0.$. La tangente est donc $\begin{pmatrix} \cos(t_0) \\ \sin(t_0) \\ t_0 \end{pmatrix} +$



Vect $\begin{pmatrix} -\sin(t_0) \\ \cos(t_0) \\ 1 \end{pmatrix}$.

Calculons la projection de Γ sur (xOy) et (xOz). Le projeté de $M(t)$ sur (xOy) est $\begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ 0 \end{pmatrix}$ et donc la projection de Γ est le cercle de centre O et de rayon 1.

Le projeté de $M(t)$ sur (xOz) est $\begin{pmatrix} \cos(t) \\ 0 \\ t \end{pmatrix}$. La projection de Γ est la courbe représentative de cos tracée le long de l'axe (Oz).

Remarque : Γ est contenue dans la surface d'équation $x^2 + y^2 = 1$ qui est un cylindre.

I.2 Surfaces paramétrées

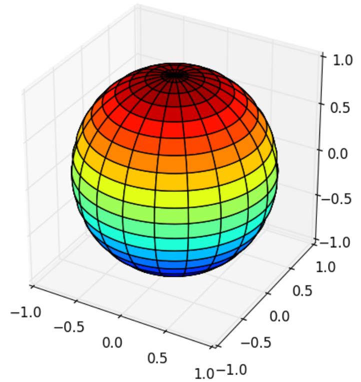
I.2.1 Définition

On appelle nappe paramétrée ou surface paramétrée une fonction de classe $\mathcal{C}^k$ ($k \geqslant 1$) définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^3$. Une telle fonction f sera notée $f : (u,v) \mapsto M(u,v) = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{pmatrix}$.

Le support d'une surface paramétrée est l'ensemble $S = \{M(u,v) \mid (u,v) \in U\} = f(U)$.

I.2.2 Exemple

Pour $u, v \in \mathbb{R}$ on pose $M(u,v) = \begin{pmatrix} \cos(u)\cos(v) \\ \sin(u)\cos(v) \\ \sin(v) \end{pmatrix}$. Voir python pour le tracé



I.2.3 Définition

Soit $f : (u,v) \mapsto M(u,v)$ une surface paramétrée de support S. Une courbe **tracée sur** S est une courbe paramétrée dont le support est inclus dans S.

Définir une telle courbe revient à donner deux fonctions $u, v \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ (I un intervalle) telles que $\forall t \in I$ $(u(t), v(t)) \in U$. On obtient alors une courbe $\gamma : t \mapsto M(u(t), v(t))$. Son support Γ est inclus dans S.

I.2.4 Théorème

Soit $\gamma : t \mapsto M(u(t), v(t))$ définie sur I une courbe tracée sur S (notation de la définition). Soit $t_0 \in I$. Si $\gamma(t_0) = M(u(t_0), v(t_0)) = (u_0, v_0)$ est un point régulier alors la tangente en ce point a un vecteur directeur appartenant à $\mathrm{Vect}(\frac{\partial M}{\partial u}(u_0,v_0), \frac{\partial M}{\partial v}(u_0,v_0))$

Preuve.

γ est dérivable par composition et on a pour $t \in I$, $\gamma'(t) = u'(t)\frac{\partial M}{\partial u}(u(t),v(t)) + v'(t)\frac{\partial M}{\partial v}(u(t),v(t))$.

Si on applique en t_0, on obtient le résultat souhaité (et même les coefficients de la combinaison linéaire correspondante qui sont respectivement $u'(t_0)$ et $v'(t_0)$). ■

I.2.5 Définition

Soit $f : (u,v) \mapsto M(u,v)$ une surface paramétrée définie sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^2$. On note S son support. Soit $(u,0,v_0) \in U$ et $M_0 = M(u_0, v_0)$.

1. On dit dit M_0 est un point **regulier** de S (ou de f) ssi $\left(\frac{\partial M}{\partial u}(u_0,v_0), \frac{\partial M}{\partial v}(u_0,v_0)\right)$ est libre c'est à dire ssi $\frac{\partial M}{\partial u}(u_0,v_0) \wedge \frac{\partial M}{\partial v}(u_0,v_0) \neq \vec{0}$.
   Sinon on dit que M_0 est critique ou singulier.
2. Si M_0 est régulier, on appelle plan tangent à S en M_0 le plan $M_0 + \mathrm{Vect}(\frac{\partial M}{\partial u}(u_0,v_0), \frac{\partial M}{\partial v}(u_0,v$

I.2.6 Remarque

Le plan tangent en M_0 est en fait la réunion de toutes les tangentes aux courbes tracées sur S et qui passent par M_0.

I.2.7 Exemple

Pour $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ on pose $\begin{cases} x(u,v) = u+v \\ y(u,v) = u-v \\ z(u,v) = uv \end{cases}$. Trouvons les points réguliers ainsi que le plan tangent en $(u,v) = (0,0)$.

$\frac{\partial M}{\partial u}(u,v) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ v \end{pmatrix}$, $\frac{\partial M}{\partial v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ u \end{pmatrix}$. Alors $\frac{\partial M}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial M}{\partial v}(u,v) = \begin{pmatrix} u+v \\ u+v \\ -2 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$.

En $(0,0)$ le plan tangent est normal à $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ donc a une équation de la forme $z + c = 0$ où $c \in \mathbb{R}$ est à trouver. Or $M(0,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, donc le plan cherché est d'équation $z = 0$.

I.2.8 Définition
En un point régulier M_0, la droite passant par M_0 et normale au plan tangente est appelée normale à la surface en M_0.

II Equation cartésienne

II.1 Equation explicite

II.1.1 Surface représentative

Rappelons que pour $f : \mathcal{C}^1(U,\mathbb{R})$, sa surface représentative est la surface d'équation $z = f(x,y)$ qui est l'ensemble $\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ f(x,y) \end{pmatrix} \mid (x,y) \in U\}$.

Une telle surface peut être paramétrée par $M(u,v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ f(u,v) \end{pmatrix}$.

II.1.2 Plans tangents

Tous les points sont réguliers car on obtient $\frac{\partial M}{\partial u}(u,v) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(u,v) \end{pmatrix}$, $\frac{\partial M}{\partial v}(u,v) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(u,v) \end{pmatrix}$ et la plan tangent est normal à $\begin{pmatrix} -\frac{\partial f}{\partial x}(u,v) \\ -\frac{\partial f}{\partial y}(u,v) \\ 1 \end{pmatrix}$.

On retrouve le résultat du cours sur les fonctions de deux variables. Au point $M_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ de la surface $S : z = f(x,y)$, le plan tangent est d'équation

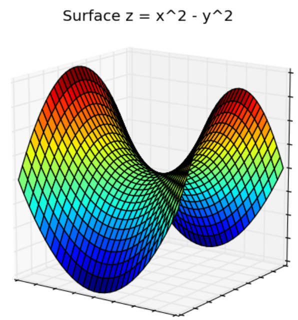
$$z - z_0 = (x - x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) + (y - y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$$

II.1.3 Exemple
Calculons l'équation du plan tangent et une représentation paramétrique de la normale en tout point régulier de $S : z = x^2 - y^2$.

Comme vu au dessus, tous les points sont réguliers et en $M_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ x_0^2 - y_0^2 \end{pmatrix} \in S$, le plan tangent est

$$P_0 : z = z_0 + (x - x_0)2x_0 + (y - y_0) \times (-2y_0) = 2x_0x - 2y_0y - x_0^2 + y_0^2$$

La normale est alors $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ x_0^2 - y_0^2 \end{pmatrix} + \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 2x_0 \\ 2y_0 \\ -1 \end{pmatrix}$.



II.1.4 Position relative de la surface et du plan tangent

Voir le chapitre précédent : on étudie les valeurs propres de la matrices hessienne en ce point.

Pour reprendre l'exemple précédent, on a $f(x,y) = f(x_0,y_0) + (x - x_0)2x_0 + (y - y_0) \times (-2y_0) + {}^t(X - X_0)H(X - X_0) + o_0(\|X - X_0\|)$ où $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ avec $H = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. Les valeurs propres sont opposées, donc en chaque point, P_0 traverse la surface S (on parle de points hyperboliques).

Dans le cas général, on calcule $\mathrm{tr}(H)$ et $\det(H)$ pour connaître les signes des valeurs propres réelles (merci les théorèmes spectral et de Schwartz).

II.1.5 Intersection avec un plan

Donner l'interprétation géométrique des intersections de la surface S précédente avec les plans d'équations $x = \alpha$, $y = \beta$, $z = \gamma$ pour α, β, γ fixés.

On trouve respectivement : une parabole, une parabole, une hyperbole ou la réunion de deux droites (qui est le cas $\gamma = 0$).

II.2 Equation implicite

II.2.1 Définition

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^3$ et $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$. On appelle surface (implicite) d'équation $f(x,y,z) = 0$ l'ensemble $\Sigma = \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 | \ f(x,y,z) = 0\}$ (l'ensemble des solutions de l'équation).

Un point $M \in \Sigma$ est dit **régulier** ssi $\overrightarrow{grad}\, f(M) \neq \vec{0}$ et singulier sinon.

II.2.2 Exemple

On peut par exemple considérer les surfaces d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ou $x^2 + y^2 = 4$ (décrire cette dernière).

II.2.3 Egalité avec une surface paramétrée

Reprenons $M(u,v) = \begin{pmatrix} \cos(u)\cos(v) \\ \sin(u)\cos(v) \\ \sin(v) \end{pmatrix}$ et notons S le support de la surface.

Si $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = M(u,v) \in S$ alors $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ et donc $S \subset \Sigma : x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Dans le cas général, montrer l'égalité est délicat. Le cas favorable est quand les surfaces ne sont pas égales et il suffit de trouver un point de Σ qui ne soit pas dans S (on raisonne souvent sur les signes d'une ou plusieurs coordonnées).

Dans notre exemple, il y a égalité et nous allons le montrer.

Soit $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \Sigma$. Ainsi $(x^2+y^2)+z^2 = 1$. Donc il existe un $\alpha \in [-\pi, \pi]$ (unique d'ailleurs) tel que $z = \sin(\alpha)$ et $x^2 + y^2 = \cos\alpha$.

Si $\cos(\alpha) = 0$, alors $x = y = 0$ (et d'ailleurs $z = \pm 1$). Sinon, $\left(\frac{x}{\cos\alpha}\right)^2 + \left(\frac{y}{\cos\alpha}\right)^2 = 1$ et donc (toujours d'après le cours de sup), il existe $\beta \in [-\pi, \pi]$ tel que $\frac{x}{\cos\alpha} = \cos\beta$ et $\frac{y}{\cos\alpha} = \sin\beta$.

En posant $u = \beta$ et $v = \alpha$, on a bien $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = M(u,v)$ et donc $\Sigma \subset S$.

II.2.4 Théorème (Plan tangent)

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^3$ et $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$. Soit Σ la surface d'équation $f(x,y,z) = 0$ et $M_0 \in \Sigma$ un point régulier.

Alors le plan tangent à Σ en M_0 est le plan passant par M_0 et normal à $\overrightarrow{grad}\, f(M_0)$ ie le plan d'équation

$$(x - x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) + (y - y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) + (z - z_0)\frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) = 0$$

Preuve.
Admis ∎

II.2.5 Idée de la preuve

L'idée principale est d'utiliser le théorème d'inversion locale qui assure que pou un point régulier M_0, on a "autour" de M_0 $f(x,y,z) = 0 \iff z = \varphi(x,y)$ pour une certaine fonction φ (ou alors on a $x = \varphi(y,z)$ ou $y = \varphi(x,z)$). Ceci revient à pouvoir paramétrer, au moins localement la surface Σ.

II.2.6 Exercice

Montrer que les plan tangents à une sphère sont normaux au rayon.

II.2.7 Exemple

Décrire géométriquement la courbe plane $\mathcal{C} : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x - y + \frac{1}{\sqrt{2}} z = 0 \end{cases}$.

Décrire la projection orthogonale de $\mathcal{C}$ sur (xOy).

On obtient une conique d'équation $x^2 + y^2 + 2(x-y)^2 = 1 \iff 3x^2 - 4xy + 3y^2 = 1$

La matrice associée est $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ dont les valeurs propres sont 1 et 5. De plus $E_1(A) = \text{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $E_5(A) = \text{Vect}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Ainsi par rotation d'angle $\frac{\pi}{4}$ on obtient l'équation réduite $x'^2 + 5y'^2 = 1$ qui est une équation d'ellipse que l'on sait tracer.

```
u = np.array([1, 1]) / np.sqrt(2)
v = np.array([-1, 1]) / np.sqrt(2)
T = np.linspace(-np.pi, np.pi, 150)
points = [np.cos(t) * u + np.sin(t) * v / np.sqrt(5) for t in T]
X = np.array([p[0] for p in points])
Y = np.array([p[1] for p in points])
plt.plot(X, Y)
```

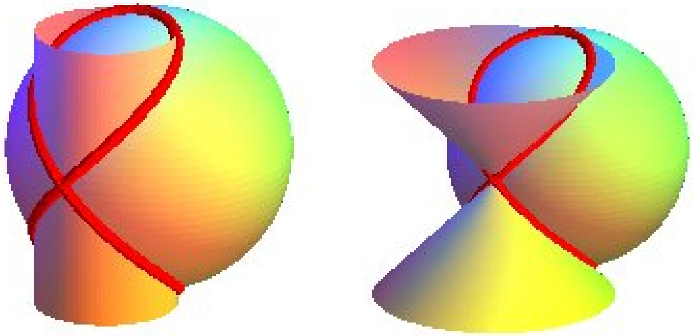
II.2.8 Adaptation aux courbes définies implicitement

On a des résultats tout à fait similaires pour les courbes de $\mathbb{R}^2$ définies par des équations de la forme $f(x,y)=0$. En particulier, la droite tangente en $M_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ est d'équation

$$(x-x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) + (y-y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = 0$$

pour un point régulier M_0 de la courbe.

II.3 Intersection de surfaces



II.3.1 Définition
Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^3$ et $f,g \in \mathcal{C}^1(U,\mathbb{R})$.

On appelle courbe d'équation cartésienne $\Gamma : \begin{cases} f(x,y,z)=0 \\ g(x,y,z)=0 \end{cases}$ l'intersection des des surfaces ainsi définies (cette intersection peut être une surface, un ou des points, vide...).

Un point $M \in \Gamma$ est dit régulier si et seulement si $\overrightarrow{grad}\, f(M) \wedge \overrightarrow{grad}\, g(M) \neq \vec{0}$

II.3.2 Remarque

Un point M_0 est régulier ssi il l'est pour les deux surfaces $\Sigma_1 : f(x,y,z)=0$ et $\Sigma_2 : g(x,y,z)=0$ et que les plans tangents en M_0 ne sont pas confondus.

II.3.3 Théorème
Avec les notations de la définition précédente, si $M_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ est un point régulier de Γ alors la tangente à Γ en M_0 est la droite $M_0 + \mathrm{Vect}(\overrightarrow{grad}\, f(M_0) \wedge \overrightarrow{grad}\, g(M_0))$

Preuve.
Une idée : la tangente à Γ est l'intersection des plans tangents à Σ_1 et Σ_2 en M_0. De plus, le gradient est normal au plan tangent. ∎

III Surfaces particulières

III.1 Surfaces réglées

III.1.1 Définition
Une surface S est dite **réglée** ssi elle peut être écrite comme la réunion d'une famille de droites.

Plus précisément, S est réglée ssi il existe une surface paramétrée dont le support est S de la forme $M(k,t) = A(t) + ku(t)$ où A, u sont de classe $\mathcal{C}^k(I,\mathbb{R}^3)$ et u ne s'annule pas. M est alors définie sur $I \times \mathbb{R}$.

Pour un t fixé, la droite $\mathcal{D}_t = A(t) + \mathrm{Vect}(u(t))$ est une **génératrice** de S et on a $S = \bigcup_{t\in I} \mathcal{D}_t$

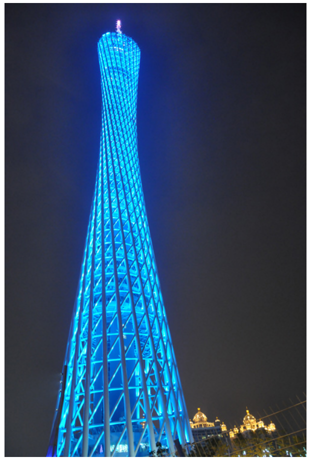
III.1.2 Exemple
Le cône d'équation $x^2+y^2=1$ est réglé. Ses génératrices sont parallèles à (Oz). Une paramétrisation possible est $M(k,t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ k \end{pmatrix}$

III.1.3 Exemple
Considérons la jolie surface $\Sigma : x^2+y^2-z^2=1$ (hyperboloïde de révolution à une nappe).

Soit $M = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Supposons pour l'instant $x \neq \pm 1$.

$M \in \Sigma$ ssi $(y-z)(y+z) = (1-x)(1+x)$.

Or $(1-x)(1+x) \neq 0$ donc $M \in \Sigma$ ssi il existe un $p \neq 0$ tel que $(y-z) = p(1-x)$ et $(y+z) = \frac{1+x}{p}$. C'est à dire $\begin{cases} px+y-z=p \\ -\frac{1}{p}x+y+z=\frac{1}{p} \end{cases}$. Il s'agit de l'intersection de 2

plans non parallèles et donc d'une droite.

Ainsi les points de Σ d'abscisse $\neq \pm 1$ sont décrits par une réunion de droites.

Le cas $x = \pm 1$ est facile : on obtient $y = \pm z$ et $\begin{cases} x = \pm 1 \\ y = \pm z \end{cases}$ est la réunion de 4 droites.

III.1.4 Coin culture

Si on échange $(1-x)$ et $(1+x)$ dans le raisonnement précédent, on obtient une autre famille de droites génératrices, disjointe de la première (aucune droite n'est dans les deux familles). On peut prouver que ces deux familles sont les seules familles de génératrices de Σ.

III.1.5 Proposition
Soit S une surface réglée. En un point régulier M_0, le plan tangent contient la génératrice passant par M_0.

Preuve.
Avec les notations de la définition, $\frac{\partial M}{\partial k}(k,t) = u(t)$ est un des vecteurs qui engendre la direction du plan tangent. ■

III.1.6 Exemple (Un cône)

On considère l'ellipse $\mathcal{C} : \begin{cases} x^2 - \frac{y^2}{4} = 1 \\ z = 0 \end{cases}$ et le point $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Donner un représentation de la surface réglée Σ engendrée par les droites qui passent par A et un point de $\mathcal{C}$.

On peut donner une représentation paramétrique facilement, car les droites $\mathcal{D}_t$ qui sont génératrices de Σ sont de la forme $\mathcal{D}_t = A + \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} \cos(t) - 1 \\ 2\sin(t) - 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Trouvons une équation cartésienne. On a, pour les points de Σ, $\begin{cases} x = 1 + k(\cos t - 1) \\ y = 1 + k(2\sin(t) - 1) \\ z = 1 - k \end{cases} \Longleftarrow$

$\begin{cases} x - z = k\cos t \\ y - z = 2k\sin t \\ k = 1 - z \end{cases}$.

Ainsi les points de Σ vérifient $4(x-z)^2 + (y-z)^2 = 4(1-z)^2$ (on a une inclusion, on peut vérifier la deuxième d'une manière similaire au raisonnement fait sur la sphère en posant $k = 1 - z$).

III.1.7 Définition

1. Un **cône** est une surface engendrée par toutes les droites passant par un point fixe Ω et un point d'une courbe Γ.
2. Un **cylindre** est une surface engendrée par toute les droites dirigée par $\vec{u}$ fixé et passant par un point d'une courbe Γ.

III.1.8 Remarque

Quand Γ est un cercle et le projeté orthogonal de Ω est le centre de ce cercle, on obtient le cône "sablier" usuel.

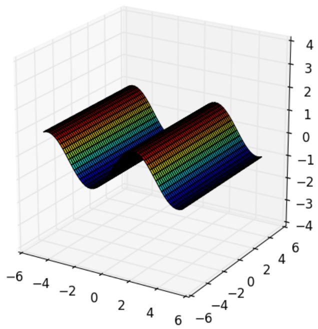
Dans le cas où $\vec{u}$ est normal au plan contenant le cercle Γ, on obtient un cylindre de section circulaire.

Mais ce ne sont pas les seuls cônes et cylindre !

Exercice 1
On prend $\vec{u} = \vec{\jmath}$ et Γ paramétrée par $\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = 0 \\ z(t) = \sin(t) \end{cases}$ (d'équation $z = \sin(x)$ et $y = 0$).
Donner une représentation paramétrée et une équation.

Une équation est $z = \sin(x)$ et une représentation paramétrée est $M(u,v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ \sin(u) \end{pmatrix}$

(un paramètre pour la courbe, un pour le coefficient de $\vec{u}$).



III.2 Surfaces de révolution

III.2.1 Définition

On appelle surface de révolution la surface S obtenue par rotation d'une courbe Γ par rotation autour d'une droite Δ.

- Δ est l'axe de S.
- Les intersections de S avec les plans orthogonaux à Δ sont soit vide soit des cercles d'axe Δ que l'on appelle parallèles de S.
- Un plan méridien de S est un plan qui contient Δ.
- Une méridienne de S est l'intersection de S avec un demi-plan, méridien délimité par Δ.

III.2.2 Axe (Oz) et coordonnées cylindriques

Dans le cas où Γ est donné par une courbe paramétrée f et $\Delta = (Oz)$, on peut utiliser les coordonnées cylindriques pour paramétrer S.

En effet, $M = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in S$ ssi il existe un point $f(t)$ tel que $d(M,(Oz)) = d(f(t)Oz)$ et $z = z(t)$. Ainsi, en coordonnées cylindriques, $\rho = \rho(t)$ et $z = z(t)$ donc $M = \begin{pmatrix} \rho(t)\cos(\theta) \\ \rho(t)\sin(\theta) \\ z(t) \end{pmatrix}$.

III.2.3 Exemple

On considère le cercle $\mathcal{C}$ de centre $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, de rayon 1 contenu dans le plan (xOz).

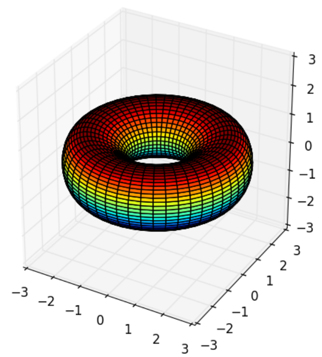
Donner une paramétrisation et une équation de la surface de révolution de $\mathcal{C}$ autour de $\Delta = (Oz)$.

Une paramétrisation de $\mathcal{C}$ est $\gamma(t) = \begin{cases} x(t) = 2 + \cos(t) \\ y(t) = 0 \\ z(t) = \sin(t) \end{cases}$.

$M = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in S$ ssi il existe t tel que $d(M,(Oz)) = d(\gamma(t),(Oz))$ et $\overrightarrow{M\gamma(t)} \perp (Oz)$ ie $\rho = \rho(t)$ et $z = z(t)$. Ainsi $M = \begin{pmatrix} \rho(t)\cos(\theta) \\ \rho(t)\sin(\theta) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$ où $\rho(t) = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2} = \sqrt{4 + 4\cos(t) + \cos^2(t) + \sin^2(t)} = \sqrt{5 + 4\cos(t)}$.

Finalement, $M = \begin{pmatrix} \sqrt{5+4\cos(t)}\cos(\theta) \\ \sqrt{5+4\cos(t)}\sin(\theta) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$ pour un $t, \theta \in [-\pi, \pi]^2$.

De plus, on a $x^2 + y^2 = 5 + 4\cos(t)$ donc $\left(\frac{x^2+y^2-5}{4}\right)^2 + z^2 = 1$ et on a trouvé une surface Σ qui contient S.



III.2.4 Cas général

Dans le cas général, il faut traduire les conditions : $M \in S$ ssi il existe $M_0 \in \Gamma$ tel que $d(M,\Delta) = d(M_0,\delta)$ et $(\overrightarrow{MM_0}|\vec{u}) = 0$ où $\vec{u}$ dirige Δ.

Il s'agit ensuite, pour obtenir une équation cartésienne d'éliminer les coordonnées de M_0 (ou son paramètre) de ses équations. Plus facile à dire qu'à faire dans le cas général.

III.2.5 Exemple

Montrer que la surface $S : x^2 + y^2 - z^2 + 1 =$ est de révolution autour de (Oz).

En coordonnées cylindriques, l'équation devient $\rho^2 = z^2 - 1$. Donc en posant $z = u$ comme paramètre, on obtient bien une paramétrisation d'une surface de révolution : $M(u,v) = \begin{pmatrix} \sqrt{u^2-1}\cos v \\ \sqrt{u^2-1}\sin(v) \\ u \end{pmatrix}$ pour un $u \in \mathbb{R}\backslash]-1,1[$ et $v \in [-\pi,\pi]$.

Une représentation paramétrique d'un méridienne peut être $t \mapsto \begin{pmatrix} \sqrt{t^2-1} \\ 0 \\ t \end{pmatrix}$