I Frenet, courbure

Exercice 1
Etude métrique de la chaînette $t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ \text{ch}(t) \end{pmatrix}$ (dont le support est la courbe représentative de ch) : calculer la longueur entre deux points de paramètres a et b, ainsi que la courbure en tout point.

Calculer et tracer la courbe développée.

Exercice 2
Déterminer les courbes birégulières telles que la courbure soit proportionnelle à l'abscisse curviligne, ie vérifiant $\gamma = as$ où $a \in \mathbb{R}^*$ et s est une abscisse curviligne.

Indication : on pourra revenir, une fois n'est pas coutume, à la définition de γ et exprimer les solutions f en fonction de s.

Exercice 3 (Spirale logarithmique)
Soit $a > 0$. On note f la courbe paramétrée définie sur $\mathbb{R}$ par $\begin{cases} x(t) & = e^{at}\cos(t) \\ y(t) & = e^{at}\sin(t) \end{cases}$

1. Calculer l'abscisse curviligne s d'origine 0.
2. Déterminer le repère de Frenet en tout point régulier.
3. Calculer la courbure de f.
4. Bonus :
   (a) Calculer la développée de f et montrer en particulier qu'elle se déduit de f par une transformation simple.
   (b) On note h_λ, pour $\lambda \in \mathbb{R}^*$, l'homothétie de rapport λ et de centre O. Montrer que l'image du support de f par h_λ est en fait une rotation de ce support. L'idée est que cette courbe est invariante par homothétie : n'importe quel niveau de zoom donne la même courbe, à une rotation près (tourner la tête !).

II Enveloppes

Exercice 4
On considère le cercle unité centré en O noté $\mathcal{C}$ ainsi qu'une source lumineuse au point S de coordonnées $(-1, 0)$.

1. Soit $t \in]-\pi, \pi[$ et $A(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$. Donner un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}_t$ portant la réflexion d'un rayon lumineux arrivant sur le cercle en $A(t)$.
2. Donner une paramétrisation de l'enveloppe des droites $(\mathcal{D}_t)_{t \in]-\pi,\pi[}$ et tracer.

Exercice 5
On considère deux points P, Q parcourant le cercle unité à des vitesses angulaires respectives de 1 et $\omega \neq \pm 1$. Calculer une représentation paramétrique de l'enveloppe des droites $\mathcal{D}_t = (P(t)Q(t))$. On pourra utiliser les nombres complexes.

Tracer pour $\omega = 3$.