Techniques de base

Exercice 1
Montrer que les fonctions suivantes sont continues :

1. $f_1 : x \mapsto \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^x(t)\mathrm{d}t$ sur $\mathbb{R}^+$.
2. $f_2 : x \mapsto \int_0^{+\infty} \sqrt{t}e^{-xt}\mathrm{d}t$ sur $[a, +\infty[$ pour $a > 0$ puis sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 2
Montrer que les fonctions suivantes sont de classe $\mathcal{C}^1$:

1. $f_1 : x \mapsto \int_{-\pi}^{\pi} \ln(1 + x\sin(t))\mathrm{d}t$ sur $[-a, a]$ pour $a \in]0, 1[$. Conclusion ?
2. $f_2 : x \mapsto \int_0^1 \varphi(xt)\mathrm{d}t$ sur $\mathbb{R}$ où $\varphi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Indication : dominer sur un segment.

Applications

Exercice 3

1. Étudier l'existence, la continuité et la dérivabilité sur $\mathbb{R}$ de
$$f : x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos(xt)\,\mathrm{d}t.$$
2. Déterminer une équation différentielle simple vérifiée par f et en déduire une valeur simple pour $f(x)$ (on pourra admettre que $f(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$).

Exercice 4
Soit $f(x) = \displaystyle\int_0^{\pi} \cos(x \sin t)\mathrm{d}t$ pour $x \in \mathbb{R}$

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et exprimer f' et f''.
2. Déterminer une équation différentielle linéaire du second ordre vérifiée par f (en simplifiant $f''(x) + f(x)$).
3. Donner le développement en série entière de f

Exercice 5
On souhaite calculer $I = \int_0^1 \frac{t-1}{\ln(t)}\mathrm{d}t$

1. Montrer que I est convergente.
2. On pose $f : x \mapsto \int_0^1 \frac{t^x-1}{\ln(t)}\mathrm{d}t$. Montrer que f est dérivable sur $]-1, +\infty[$ en l'étudiant sur $[a, +\infty[$ pour a bien choisi.
3. En déduire une expression simple de f puis la valeur de I.

Exercice 6
Pour $x, y > 0$, on pose $F(x, y) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}-e^{-yt}}{t}\mathrm{d}t$.

1. Pour $y > 0$ fixé, montrer que $x \mapsto F(x, y)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur tout intervalle $[a, +\infty[$ où $a > 0$.
2. Justifier que la question précédente entraîne la classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Calculer $\frac{\partial F}{\partial x}$ et en déduire la valeur de $F(x, y)$ pour tout $x, y > 0$.

Exercice 7

1. **Etude géométrique** Donner un paramétrage par l'abscisse curviligne de la courbe paramétrée vérifiant
$$\gamma(s) = s,\ M(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
ou encore, la courbure au point de paramètre s (l'abscisse curviligne d'origine 0) vaut s.
Utilisation : cette courbe paramétrée est utilisée pour amorcer les virages après une ligne droite (voies ferroviaires, sortie d'autoroute) : le fait que la courbure augmente linéairement permet d'éviter l'à-coup que provoquerait le passage d'une ligne droite à un arc de cercle (penser force centrifuge et rayon).
2. **Point asymptote** Nous allons montrer que la courbe $\begin{cases} x(t) = \int_0^t \cos(u^2)\mathrm{d}u \\ y(t) = \int_0^t \sin(u^2)\mathrm{d}u \end{cases}$ possède un point asymptote en $+\infty$.
Soit $F\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}, x \longmapsto i\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{\mathrm{i}x^2(t^2+1)}}{t^2+1}\mathrm{d}t + \left(\int_0^x e^{\mathrm{i}u^2}\,\mathrm{d}u\right)^2$.
   (a) Montrer que $F \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Calculer F'. Conclusion ?
   Indication : effectuer le changement de variable $u = xt$ sur la bonne intégrale...
   (b) On pose $G : A \mapsto \displaystyle\int_0^A e^{\mathrm{i}u^2}\,\mathrm{d}u$. Montrer que G admet une limite complexe en $+\infty$.
   (c) Calculer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_0^1 \frac{t^2\, e^{\mathrm{i}x^2t^2}}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$.
   Indication : effectuer une intégration par parties en intégrant $t \mapsto 2t\, e^{\mathrm{i}x^2t^2}$.

(d) En déduire $\lim_{x \to +\infty} \int_0^1 \frac{e^{\mathrm{i}x^2t^2}}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$.

(e) En déduire $\int_0^{+\infty} e^{\mathrm{i}u^2}\,\mathrm{d}u$ en admettant que ses parties réelles et imaginaires sont positives.

(f) Conclure pour notre courbe paramétrée, puis pour celle de la question 1.