

Plan tangent

Exercice 1

Trouver les plans tangents à la surface \mathcal{S} d'équation $x^2 + y^2 + 4z^2 = 1$ et parallèles au plan d'équation $x + 2y + z = 0$.

Exercice 2

Étudier la position locale de S définie par $z \cos x - y \sin x = 0$ par rapport à son plan tangent en l'origine

Exercice 3

Soit $a > 0$, et soit Γ l'intersection de la sphère \mathcal{S} d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ et du cylindre \mathcal{C} d'équation $x^2 + y^2 - ax = 0$.

- Déterminer une paramétrisation de Γ .
- Quel est la tangente à Γ en l'un de ses points?
- Soit P le point d'intersection de la tangente à Γ en un point M avec le plan (xOy) . Déterminer le lieu de P lorsque M parcourt Γ .

Exercice 4

Soit \mathcal{S} l'ellipsoïde d'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

où a, b et c sont trois réels strictement positifs.

Déterminer les plans tangents à S qui recoupent les axes Ox, Oy et Oz en trois points A, B et C tels que $OA = OB = OC$.

Surfaces réglées

Exercice 5

Montrer que la surface $\begin{cases} x = 3u + v \\ y = 2u^2 + 2uv \\ z = u^3v \end{cases}, (u, v) \in \mathbb{R}^2$ est réglée.

Exercice 6

Soit \mathcal{S} la surface définie par les équations paramétriques

$$x = u^2, \quad y = uv, \quad z = u - v$$

Montrer que \mathcal{S} est une surface réglée.
Donner le plan tangent en un point régulier.

Exercice 7

Donner une représentation paramétrique ainsi qu'une équation cartésienne du cône de

$$\text{directrice } \Gamma : \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = t^2 \\ z(t) = t + 1 \end{cases} \quad \text{et de sommet } \Omega : \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 8

Donner une équation cartésienne du cylindre Σ de directrice $\Gamma : \begin{cases} x^2 + 2y^2 - z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$ et

$$\text{de direction } \vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Révolution

Exercice 9

On considère une surface S d'équation $f(x^2 + y^2, z) = 0$. Montrer que S est une surface de révolution autour de (Oz) . Etudier la réciproque.

Exercice 10

On considère la courbe \mathcal{C} paramétrée par $\begin{cases} x(t) = \cos^3(t) \\ y(t) = \sin^3(t) \\ z(t) = \cos(2t) \end{cases}, t \in [-\pi, \pi]$. Déterminer une équation de la surface de révolution de \mathcal{C} autour de (Oz) .

Exercice 11

Soit $S : (x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2(x^2 - y^2 - z^2)$ (où $a > 0$ est fixé). Montrer que S est une surface de révolution autour d'un axe à préciser et tracer une méridienne.¹

1. Indication : pour la méridienne, on pourra d'abord chercher une équation sur les coordonnées polaires.