

Devoir maison 4

A rendre le 22/11/2016 au plus tard.

Exercice 1

Soit n un entier naturel non nul. On pose $J_n = \int_0^\pi \sin^{2n}(t) dt$.

0. Rappeler les formules trigonométriques pour $\cos(x \pm \frac{\pi}{2})$ et $\sin(x \pm \frac{\pi}{2})$ valables pour $x \in \mathbb{R}$

1. Montrer que $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}(t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n}(t) dt$.

2. Montrer que $J_n = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n}(t) dt$.

3. Calculer, pour tout entier **relatif** k , $\int_0^\pi e^{ikt} dt$. Attention au k (ou cas, comme on veut) particulier.

4. Rappeler les formules d'Euler, relatives à l'exponentielle complexe.

5. Rappeler la formule du binôme de Newton.

6. A l'aide du binôme de Newton, exprimer, pour tout réel t , $\cos^{2n}(t)$ en fonction d'exponentielles complexes.

7. Que vaut $\int_0^\pi \cos^{2n}(t) dt$?

8. En déduire $J_n = \frac{1.3.5 \dots (2n-1)}{2^n n!} \pi$.