

Résolution de systèmes

Exercice 1 (Echauffement)

Résoudre, en précisant à chaque fois le rang :

$$1. \begin{cases} 2x - y = 1 \\ x + y = 2 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x + y + z = 2 \\ z - y + x = 0 \end{cases}$$

$$3. x - 2y + 3 = 0$$

$$4. -x - 2y + 3z = 1$$

Exercice 2

Résoudre les systèmes d'inconnues x, y, z et éventuellement $t \in \mathbb{C}$:

$$1. \begin{cases} 2x - y + 3z = 2 \\ -x + 2y + 2z = 3 \\ 3x + 8z = 7 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} x + iy - z = -1 \\ ix + 2y + z = 3i + 1 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} -x + y + 2z = 2 \\ 2x + 2y + 2z = 4 \\ 3x - y - 3z = 0 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} x - y + z + t = 0 \\ 3x + 2y + z - t = 0 \\ 3x + 12y - 3z + 3t = 0 \end{cases}.$$

Avec des paramètres

Exercice 3

1. Pour quelles valeurs de $a, b, c \in \mathbb{R}$ le système $\begin{cases} x + ay + cz = 0 \\ bx + cy - 3z = 1 \\ ax + 2y + bz = 5 \end{cases}$ d'inconnues $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ admet-il $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ comme solution ?

2. Résoudre le système $\begin{cases} x + y = a \\ 3x + 2y = b \\ 3x - 2y = c \end{cases}$. a, b, c sont fixés dans \mathbb{R} . On distinguera, suivant leurs valeurs, le nombre de solutions.

3. Donner les solutions, en fonction des valeurs de $\lambda \in \mathbb{R}$ de $\begin{cases} (2 - \lambda)x + y + z = 0 \\ x + (2 - \lambda)y + z = 0 \\ x + y + (2 - \lambda)z = 0 \end{cases}$ d'inconnues $x, y, z \in \mathbb{R}$.

Exercice 4

Donner le rang des matrices suivantes, éventuellement en fonction des paramètres.

$$1. \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & 1 \end{pmatrix}$$

$$3. \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

$$2. \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$4. \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+c & c+a & a+b \\ bc & ca & ab \end{pmatrix}$$

Application aux polynômes

Exercice 5

Trouver toutes les fonction polynomiales de degré 2 P qui vérifient $P(1) = 1$, $P(2) = 0$, $P(3) = 1$.

Plus généralement, combien de fonction polynomiales de degré 2 vérifient $P(1) = \alpha$, $P(2) = \beta$, $P(3) = \gamma$ pour $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ fixés ?

Exercice 6

Factoriser $P(x) = x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 8x - 4$ par $x^2 + x - 2$ puis donner P sous la forme d'un produit de facteurs de degrés 1.