

Exercice 1

Une variable aléatoire suit une loi géométrique de paramètre p . Donner l'espérance de $Y = X(X-1) \dots (X-r+1)$ où $r \in \mathbb{N}$ est fixé supérieur à 2.

Exercice 2

Coralie se lève tous les matins pour aller au lycée avec une probabilité $\frac{1}{3}$ d'être en retard. Lorsque c'est le cas, elle prend le bus.

Quand elle se lève à l'heure, elle se rend à l'école à pied avec une probabilité de $\frac{2}{5}$ et en bus dans les autres cas.

On note B l'événement "Coralie prend le bus" et R l'événement "Coralie est en retard".

1. Calculer $\mathbb{P}(B)$ et $\mathbb{P}_B(R)$.
2. On observe ces faits pendant 180 jours et on note X la variable aléatoire qui compte le nombre de fois où Coralie prend le bus.
Reconnaître la loi de X , calculer son espérance, sa variance. Combien de fois, en moyenne, est-elle allée au lycée à pied?

Exercice 3

1. Dans une urne contenant N boules numérotées de 1 à N , on tire, successivement et avec remise, p boules. On note X la variable aléatoire correspondant au maximum des p numéros tirés.

Décrire (Ω, \mathbb{P}) modélisant l'expérience. Calculer $\mathbb{P}(X \leq k)$ pour $1 \leq k \leq N$ et en déduire la loi de X .

2. On note $u_n = \sum_{k=1}^n k^a$ pour $a > -1$. Montrer que $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{n^{a+1}}{a+1}$.

Exercice 4

Une urne contient $4n$ jetons numérotés de 1 à $4n$. Les jetons de 1 à n sont rouges, ceux de $n+1$ à $2n$ sont verts, et les autres sont blancs. On tire successivement et sans remise n jetons. On note A l'événement "au moins un des jetons tirés est vert", et, pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, T_k l'événement "on tire pour la première fois un jeton vert au k -ième tirage".

1. Décrire un univers Ω adapté à l'expérience aléatoire, et donner son cardinal.
2. Calculer la probabilité de l'événement A .
3. (a) Calculer $P(T_1)$.
(b) Calculer $P(T_n)$.
(c) Montrer que pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $P(T_k) = \frac{(4n-k)!(3n)!n}{(4n)!(3n-k+1)!}$.

Exercice 5

Soit $c \in \mathbb{N}^*$.

Une urne contient à l'instant initial 1 boule blanche et 1 boule noire. On effectue une suite de tirage avec remise : si la boule tirée est blanche, on rajoute c boules blanches dans l'urne et de même pour les boules noires.

On note X_i la variable aléatoire qui prend la valeur 1 si on tire une boule blanche au i ème tirage, et 0 sinon.

1. Donner la loi et l'espérance de X_1 .
2. Que représente $Z_p = \sum_{i=1}^p X_i$? Déterminer $\mathbb{P}(X_{p+1} = 1 | Z_p = k)$ pour des valeurs de k à préciser.
3. Montrer que $\mathbb{P}(X_{p+1} = 1) = \frac{1+cE(Z_p)}{2+pc}$.
4. Donner la loi de X_i pour $i \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 6

La cible d'un jeu de fléchette est constituée d'une zone jaune et d'une zone verte; la probabilité d'atteindre la zone verte, quand la cible est atteinte, est de $\frac{1}{2}$ pour tous les joueurs.

Le joueur A atteint toujours la cible et on note X la variable aléatoire représentant le nombre de lancers nécessaires pour atteindre la zone verte.

Le jour B atteint la cible avec une probabilité $p \in [0, 1]$.

1. Donner la loi de X , son espérance et sa variance.
2. Donner la probabilité que B atteigne la zone verte.
3. Le gagnant est celui qui atteint la zone verte en premier. A commence : donner la probabilité qu'il gagne. Le jeu finit-il presque sûrement?

Exercice 7

Un mobile se déplace aléatoirement sur les sommets S_1, S_2, S_3 d'un triangle. A l'étape $n = 0$ il est en S_1 .

S'il est en S_1 ou en S_3 à l'étape n , il sera en S_2 l'étape $n+1$. S'il est en S_2 , il a une probabilité $\frac{1}{4}$ d'aller en S_1 , idem pour S_3 et une probabilité $\frac{1}{2}$ de rester en S_2 .

On note respectivement a_n, b_n, c_n les probabilités pour que le mobile soit en S_1, S_2, S_3 à l'étape n , et $T_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.

Montrer qu'il existe une matrice M , dont on donnera les éléments propres, telle que $T_{n+1} = MT_n$. Calculer M^n puis T_n ainsi que les limites de $(a_n), (b_n)$ et (c_n) .

Exercice 8

On considère une urne contenant $n-1$ boules noires et une boule blanche.

1. On effectue une succession de tirages avec remise et on note T la variable aléatoire donnant le rang de premier tirage amenant une boule blanche. Donner les valeurs prises par T , sa loi, son espérance et sa variance.

2. On effectue maintenant des tirages sans remise. Soit X la variable aléatoire donnant le rang du tirage de la boule blanche. Donner les valeurs prises par X , sa loi, son espérance et sa variance.

On note Y la variable donnant le nombre de boule noire restantes dans l'urne après le tirage de la boule blanche. Exprimer Y en fonction de X et n . Donner l'espérance et la variance de Y .

Exercice 9

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires à valeurs dans \mathbb{N}^2 dont la loi est donnée par :

$$\forall (j, k) \in \mathbb{N}^2 \quad \mathbb{P}((X, Y) = (j, k)) = \frac{(j+k) \left(\frac{1}{2}\right)^{j+k}}{e^j k!}$$

- Déterminer les lois marginales de X et Y . Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
- Prouver que $E(2^{X+Y})$ existe et la calculer.

Exercice 10

- Rappeler l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
- Soit $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendante, de même loi et admettant un moment d'ordre 2. On pose $S_n = \sum_{k=1}^n Y_k$.

Prouver que $\forall a > 0 \quad \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - E(Y_1)\right| > a\right) \leq \frac{V(Y_1)}{na^2}$.

- Application. On effectue n tirages successifs, avec remise, d'une boule dans une urne contenant 2 boules rouges et 3 boules noires.

A partir de quel nombre de tirage peut on garantir à plus de 95% que la proportion de boules rouges obtenues restera comprise entre 0,35 et 0,45 ?

Indication : considérer la suite (Y_n) de variables aléatoires de Bernoulli où Y_n mesure l'issue du n ème tirage.

Exercice 11

Les deux questions sont indépendantes.

- (a) Soit X_1, X_2 deux variables aléatoires indépendantes de loi de Poisson de paramètres respectifs λ_1 et λ_2 .
Déterminer la loi de $X_1 + X_2$.
- (b) En déduire l'espérance et la variance de $X_1 + X_2$.
- Soit X et Y deux variables aléatoires. On suppose que Y suit une loi de Poisson de paramètre λ .
On suppose $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et que, pour tout $m \in \mathbb{N}$, la loi conditionnelle de X sachant $(Y = m)$ est une loi binomiale de paramètre m, p .
Déterminer la loi de X .

Exercice 12

On dispose de 100 dés dont 25 sont pipés de telle manière que la probabilité d'obtenir 6 est $\frac{1}{2}$.

- On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé et on obtient 6. Quelle est la probabilité pour que le dé soit pipé ?
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$
On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé n fois et on obtient n fois le chiffre 6. Quel est la probabilité p_n que ce dé soit pipé ?
- Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n$. Interpréter.