

Devoir maison n°1

A rendre le 10/09

Exercice 1

Soit f la fonction $\begin{cases}]0, +\infty[& \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \ln(x) - x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \end{cases}$.

Partie I

1. Montrer que $f \in \mathcal{C}^\infty(]0, +\infty[, \mathbb{R})$ puis donner les **variations** de f' .
2. Dresser le tableau de variations de f faisant apparaître les limites en 0 et $+\infty$. On pourra calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'$ pour trouver le signe de f' .
3. Vérifier que $f(2) < 0 < f(3)$ et tracer l'allure de la courbe représentative de f .
4. Faire tracer à python cette même courbe pour valider vos résultats. On prendra comme intervalle de dessin $[0.1; 10]$

Partie II

On établit ici une inégalité utile pour la suite.

1. Montrer que f est une bijection. On note $g = f^{-1}$.
2. Tracer le graphe de g . Que peut-on dire de $g(0)$?
3. On pose $\varphi : x \mapsto g(\ln(x))$.
Montrer que pour tout $x > 0$ on a $0 \leq x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \leq 1$ puis que $f(x) \leq \ln(x) \leq f(ex)$ où $e = e^1$.
4. En déduire que l'on a $x \leq \varphi(x) \leq ex$ pour tout $x > 0$.
5. Donner un majorant entier naturel de $\varphi(10)$.
6. Montrer que $\forall x > 0 \quad x^{x+1} > 10(x+1)^x \iff x > \varphi(10)$. On pourra changer l'expression de $f(x)$ et factoriser.

Partie III (*)

On se pose le problème de savoir, pour $p, q \in \mathbb{N}$ supérieurs à 2, à quelle condition p^q et q^p ont le même nombre de chiffres dans leurs représentations décimales.

On suppose donc dans cette partie que $p, q \in \mathbb{N}$, $p, q \geq 2$ et p^q et q^p ont le même nombre de chiffres dans leurs représentations décimales.

1. Soit $\alpha > e$. On pose $f_\alpha : \begin{cases} [\alpha, +\infty[& \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \alpha^x x^{-\alpha} \end{cases}$.

Etudier les variations de cette fonction en précisant la limite en $+\infty$.

2. On suppose ici que $p, q \geq 28$. Et on veut montrer que $p = q$. On suppose au contraire que $p > q$.
 - (a) Montrer que $f_q(p) \geq f_q(q+1)$.
 - (b) En déduire que $f_q(p) > 10$. On pourra utiliser la partie II (comme annoncé au début de celle-ci...).
 - (c) Trouver une contradiction et conclure.
3. Ecrire un script python qui permet de trouver tous les $p \neq q \in \llbracket 2, 27 \rrbracket$ tels que p^q et q^p ont le même nombre de chiffres dans leurs représentations décimales.