

## Table des matières

**I Séries convergentes**

I.1 Vocabulaire . . . . . 1

I.2 Séries de référence . . . . . 1

I.3 Séries à termes positifs . . . . . 2

I.4 Application à l'étude de suites . . . . . 3

**II Convergence absolue**

II.1 Convergence d'une série complexe . . . . . 3

II.2 Propriétés . . . . . 4

II.3 Approximations et restes . . . . . 5

## I Séries convergentes

### I.1 Vocabulaire

#### I.1.1 Définition

Soit  $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$  une suite.

- On appelle série de terme général  $u_n$  et on note  $\sum u_n$  ou  $\sum_{n \geq 0} u_n$  la **suite**  $(S_N)$  définie par

$$\forall N \in \mathbb{N} \quad S_N = \sum_{n=0}^N u_n$$

On dit que  $S_N$  (le nombre) est la  $N$ ième somme partielle de cette série.

Il est possible de commencer à sommer non pas à l'indice 0 mais à un indice entier fixé  $n_0$  (ce qui revient à poser  $u_n = 0$  pour  $n \in \llbracket 0, n_0 - 1 \rrbracket$ ). Dans ce cas la série est notée  $\sum_{n \geq n_0} u_n$ .

- On dit que la série  $\sum u_n$  converge ssi la suite des somme partielles converge. Dans le cas contraire, on dit que la série diverge. Sa **nature** est d'être convergente ou divergente.

Quand elle existe, on note  $S = \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$  la limite des sommes partielles et on l'appelle somme de la série.

- Dans le cas d'une série convergente, la suite des restes de la série est la suite définie par  $R_N = \sum_{n=N+1}^{+\infty} u_n = S - S_N$

### I.1.2 Complexes

Comme d'habitude, il est suffisant d'étudier les séries des parties réelles et imaginaires  $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ .

### I.1.3 Modifier une série

On ne change pas la nature convergente ou divergente d'une série en modifiant les  $k$  premières valeurs de  $u_n$  pour un  $k$  fixé. Par contre on modifie la valeur de la somme...

### I.1.4 Définition-Proposition

Soit  $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ .

**SI**  $u_n \rightarrow 0$  **ALORS**  $\sum u_n$  diverge.

Dans ce cas on dit que  $\sum u_n$  diverge grossièrement.

### I.1.5 Utilisation

Ce résultat n'a qu'une seule utilité : prouver qu'une série diverge. La contraposée est : si  $\sum u_n$  converge alors  $u_n \rightarrow 0$ .

Exemple : montrer que  $\sum (1 - \frac{1}{n})^n$  diverge.

### I.1.6 Proposition

Considérons 2 séries  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$ .

- Si  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  convergent alors  $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{C} \quad \sum (\lambda u_n + \mu v_n)$  converge.
- Si  $\sum u_n$  converge et  $\sum v_n$  diverge alors  $\sum (u_n + v_n)$  diverge.
- Si  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  divergent, on ne peut rien dire sur  $\sum (u_n + v_n)$ .

## I.2 Séries de référence

### I.2.1 Séries convergentes

- Soit  $q \in \mathbb{C}$ .  $\sum q^n$  converge ssi  $|q| < 1$  et  $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$ .
- Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ .  $\sum \frac{1}{n^\alpha}$  converge ssi  $\alpha > 1$ .

### I.2.2 Série divergente

La série  $\sum \frac{1}{n}$  est une série divergente appelée série harmonique.

### I.2.3 Séries télescopiques

Exemple : Calculer la somme  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ .

### I.2.4 Taylor

Soit  $x \in \mathbb{R}$ . La formule de Taylor avec reste intégral appliquée à l'ordre  $n$  à exp entre 0 et  $x$  (exp est de classe  $n+1$  sur ce segment) donne

$$e^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t dt$$

Ainsi  $\left| e^x - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \right| \leq \frac{1}{n!} \left| \int_0^x |(x-t)^n e^t| dt \right| \leq \frac{1}{n!} \int_0^x |x|^n e^t dt = \frac{|x|^n (e^x - 1)}{n!}$ .

Par croissances comparées,  $\frac{|x|^n}{n!} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$  et donc  $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$ .

## I.3 Séries à termes positifs

### I.3.1 Théorème

Soit  $(u_n)_n$  une suite de réels **positifs**.  $\sum u_n$  converge ssi la suite des sommes partielles est majorée.

$$\text{Dans ce cas, } \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sup \left( \left\{ \sum_{k=0}^N u_n \mid N \in \mathbb{N} \right\} \right).$$

### I.3.2 Remarque

Ce théorème est fondamental pour la compréhension et l'intuition des séries à termes positifs convergentes. Le terme général ne doit pas "être trop grand".

### I.3.3 Théorème (Comparaison des séries à termes positifs)

Soient  $(u_n)_n, (v_n)_n$  des suites de réels positifs.

1. Si  $u_n \leq v_n$  à partir d'un certain rang et  $\sum v_n$  converge alors  $\sum u_n$  converge.
2. Si  $u_n = O_{+\infty}(v_n)$  et  $\sum v_n$  converge alors  $\sum u_n$  converge.

3. Si  $u_n = o_{+\infty}(v_n)$  et  $\sum v_n$  converge alors  $\sum u_n$  converge.

4. Si  $u_n \sim_{+\infty} v_n$ ,  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  ont la même nature.

Les résultats 2, 3 et 4 restent vrais pour des séries à termes tous négatifs.

### I.3.4 Exemple

1.  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n^n}$  converge.
2.  $\sum \frac{n+3}{n^3-n}$

### I.3.5 $n^\alpha u_n$

Soit  $(u_n)_n$  une suite de réels positifs et  $\alpha > 1$

1. Si on a  $n^\alpha u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$  alors  $\sum u_n$  converge.

On a en effet  $u_n = o_{+\infty}\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$  dans ce cas.

2. Si on a  $n^\alpha u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell \neq 0$  alors  $\sum u_n$  converge car  $u_n \sim_{+\infty} \frac{\ell}{n^\alpha}$  qui est un terme général de signe constant d'une série convergente.

### I.3.6 Attention

L'hypothèse  $(u_n), (v_n)$  positives est fondamentale. On peut avoir  $u_n \sim v_n$ ,  $\sum v_n$  converge et  $\sum u_n$  diverge si elle n'est pas respectée.

Pour  $n > 1$ , posons  $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}}$ ,  $v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ .

1.  $u_n \sim_{+\infty} v_n$  car  $(-1)^n = o_{+\infty}(\sqrt{n})$  (comparaison d'une suite bornée à une suite de limite infinie).

2. Montrons que  $\sum v_n$  converge. Posons, pour  $N > 1$ ,  $a_N = \sum_{n=2}^{2N} v_n$  et  $b_N = \sum_{n=0}^{2N+1} v_n$ .

Alors

$$- b_N - a_N = v_{2N+1} \xrightarrow[N \rightarrow +\infty]{} 0$$

$$- a_{N+1} - a_N = -\frac{1}{\sqrt{2N+1}} + \frac{1}{\sqrt{2N+2}} \leq 0 \text{ donc } (a_N) \text{ est décroissante.}$$

$$- b_{N+1} - b_N = \frac{1}{\sqrt{2N+2}} - \frac{1}{\sqrt{2N+3}} \geq 0 \text{ donc } (a_N) \text{ est croissante.}$$

Finalement,  $(a_N)$  et  $(b_N)$  sont adjacentes et convergent donc vers une limite commune  $l \in \mathbb{R}$ . Ainsi les sommes partielles de  $\sum v_n$  convergent vers  $l$  (leurs suites des termes d'indice pairs et impairs le font).

3. De plus,  $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \frac{1}{1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \left( 1 - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{n}\right) \right) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$ . Ainsi  $u_n$  est la somme de 3 termes généraux de séries convergentes et d'un terme général de série divergente de donc  $\sum u_n$  diverge.

**I.3.7 Divergence**

Si on a  $(u_n)$  et  $(v_n)$  positives :

1. Si  $u_n \leq v_n$  APCR et  $\sum u_n$  diverge alors  $\sum v_n$  diverge.
2. Si  $u_n = o_{+\infty}(v_n)$  et  $\sum u_n$  diverge alors  $\sum v_n$  diverge.

**I.3.8 Théorème (Règle de d'Alembert)**

Soit  $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  telle que  $\forall n \in \mathbb{N} u_n > 0$ . Supposons que  $\frac{u_{n+1}}{u_n} \rightarrow \ell$ .

1. Si  $\ell < 1$  alors  $\sum u_n$  converge.
2. Si  $\ell > 1$  alors  $\sum u_n$  diverge.
3. Si  $\ell = 1$  la série peut être divergente ou convergente.

**I.3.9 Utilisation**

1. En général, le calcul de la limite du quotient n'est pas aisé, et en pratique vaut souvent 1...
2. Si l'expression de  $u_n$  fait apparaître des quantité  $n!$  ou  $\alpha^n$  en facteur, la règle de d'Alembert peut être efficace.

**I.3.10 Exemple**

Montrer que la série de terme général  $u_n = \frac{n!}{n^n}$  converge.

**I.4 Application à l'étude de suites**

**I.4.1 Proposition**

Soit  $(u_n)_n$  une suite.  $(u_n - u_0)_{n \in \mathbb{N}}$  à la même limite (ou absence de limite) que  $\sum (u_{n+1} - u_n)$ .

**I.4.2 Exemple**

$u_n = \ln\left(\frac{n!e^n}{n^n}\right)$ . Convergence ?

**I.4.3 Exemple**

$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n)$ . Montrer que  $(u_n)$  converge en étudiant la convergence de  $\sum (u_n - u_{n-1})$

**II Convergence absolue**

**II.1 Convergence d'une série complexe**

**II.1.1 Définition**

Soit  $\sum u_n$  une série complexe. On dit que cette série est absolument convergente ssi  $\sum_{n \geq 0} |u_n|$  converge (prononcer module ou valeur absolue suivant les cas).

**Explication** On regarde en fait la convergence d'une série positive, pour laquelle tous les théorèmes précédent s'appliquent.

**II.1.2 Théorème**

Soit  $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ . Si  $\sum u_n$  converge absolument alors  $\sum u_n$  converge et on a

$$\left| \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$$

**Preuve.**

— Cas réel.

On pose pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n^+ = \max(u_n, 0)$  et  $u_n^- = \max(-u_n, 0)$ . C'est à dire que  $u_n^+$  est  $u_n$  si  $u_n \geq 0$  et 0 sinon.  $u_n^-$  est  $|u_n|$  si  $u_n \leq 0$  et 0 sinon.

Ainsi ces deux nombres sont positifs et on a  $u_n = u_n^+ - u_n^-$ ,  $|u_n| = u_n^+ + u_n^-$ .

On pose pour  $N \in \mathbb{N}$ ,  $S_N = \sum_0^N u_n$  et  $S'_N = \sum_0^N |u_n|$ .

On sait que  $S'_N \xrightarrow{+\infty} l \in \mathbb{R}^+$ . Or  $S'_N = \sum_0^N u_n^+ + \sum_0^N u_n^-$ . Ces deux dernières sommes sont à termes positifs et majorées par  $l$  donc les séries  $\sum u_n^+$  et  $\sum u_n^-$  convergent.

Ainsi  $\sum u_n$  converge par différence de série convergente.

— Cas complexe.

Cette fois on pose  $u_n = x_n + iy_n$  et on sait que  $\sum |x_n + iy_n|$  converge.

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On a  $|x_n| \leq |u_n|$  et  $|y_n| \leq |u_n|$  donc les séries  $\sum x_n$  et  $\sum y_n$  convergent absolument donc convergent par le point précédent.

Ainsi la combinaison linéaire  $\sum x_n + iy_n$  converge. ■

### II.1.3 Méthode obligatoire

Pour étudier une série complexe ou une série dont le signe n'est pas constant, on étudiera toujours d'abord la convergence absolue.

### II.1.4 Exemple

Montrer que  $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n!}$  converge.

### II.1.5 Série exponentielle

Soit  $z \in \mathbb{C}$ . Montrer que  $\sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!}$  converge.

### II.1.6 Attention

La réciproque est fautive. Par exemple la série  $\sum \frac{(-1)^n}{n+1}$  converge, mais ne converge pas absolument.

Pour le voir, prenons  $x \neq 1$  et notons que  $\sum_{k=0}^n x^k = \frac{1}{1-x} - \frac{x^{n+1}}{1-x}$ . En intégrant sur  $[-1, 0]$  on obtient  $\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln(2) - \int_{-1}^0 \frac{x^{n+1}}{1-x} dx$ . Or  $0 \leq \frac{x^{n+1}}{1-x} \leq x^{n+1}$  et par croissance

de l'intégrale  $0 \leq \int_{-1}^0 \frac{x^{n+1}}{1-x} dx \leq \frac{1}{n+1}$ .

Finalement,  $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln(2)$ .

## II.2 Propriétés

### II.2.1 Proposition

Soient  $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$  et  $(v_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  avec  $\forall n \in \mathbb{N} v_n \geq 0$ .

1. Si  $|u_n| \sim_{+\infty} v_n$  et  $\sum v_n$  converge alors  $\sum u_n$  converge.
2. Si  $u_n = O_{+\infty}(v_n)$  et  $\sum v_n$  converge alors  $\sum u_n$  converge.
3. Si  $u_n = o_{+\infty}(v_n)$  et  $\sum v_n$  converge alors  $\sum u_n$  converge.

### II.2.2 Théorème

Soient  $\sum a_n$  et  $\sum b_n$  deux séries de complexes absolument convergente.

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  on pose  $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$ . Alors la série  $\sum c_n$  converge absolument

$$\text{et } \sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \times \sum_{n=0}^{+\infty} b_n$$

### Preuve.

— On considère pour commencer que  $(a_n)$  et  $(b_n)$  sont des suite réelles positives.

Notons, pour  $N \in \mathbb{N}$ ,  $A_N = \sum_{n=0}^N a_n$ ,  $B_N = \sum_{n=0}^N b_n$ ,  $C_N = \sum_{n=0}^N c_n = \sum_{n=0}^N \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$ .

Posons de plus  $A = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$  et  $B = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n$

Alors  $C_N = \sum_{k=0}^N \sum_{n=k}^N a_k b_{n-k} = \sum_{k=0}^N \left( a_k \sum_{i=0}^{N-k} b_i \right)$ . Remarquons de plus que

$$A_N B_N = \sum_{k=0}^N a_k \sum_{i=0}^N b_i$$

Ainsi  $C_N \leq A_N B_N \leq AB$ . La série  $\sum c_n$ , qui est une série de termes positifs, est majorée et donc converge. On note  $C$  sa somme.

Mais on a également

$$C_{2N} = \sum_{k=0}^N \left( a_k \sum_{i=0}^{2N-k} b_i \right) + \sum_{k=N+1}^{2N} \left( a_k \sum_{i=0}^{2N-k} b_i \right) \geq \sum_{k=0}^N \left( a_k \sum_{i=0}^N b_i \right) = A_N B_N$$

la majoration étant valable car on retranche des termes positifs.

Finalement,  $C_N \leq A_N B_N \leq C_{2N}$  et par passage à la limite ( $N \rightarrow +\infty$ , les limites existent) on obtient bien  $C = AB$ .

— Revenons maintenant au cas général.

On note en plus,  $c'_n = \sum_{k=0}^n |a_k| |b_{n-k}|$ ,  $A'_N = \sum_{n=0}^N |a_n|$ ,  $B'_N = \sum_{n=0}^N |b_n|$ ,  $C'_N =$

$\sum_{n=0}^N |c_n|$  et  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  les sommes de ces 3 séries ( $A'$ ,  $B'$  existent par hypothèse,  $C'$  d'après le cas réel positif).

On a, d'après le point précédent,  $A'_N B'_N - C'_N \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$ .

De plus,  $|C_N| \leq C'_N \leq C'$  par inégalité triangulaire et donc  $\sum c_n$  converge absolument (série à termes positifs majorée) et on note encore  $C$  sa somme (l'existence de  $C$  n'est pas nécessaire à la suite du raisonnement).

D'après les calculs du premier point,  $A_N B_N - C_N$  est une somme  $\sum_{(i,j) \in E} a_i b_j$

où  $E \subset \llbracket 0, N \rrbracket^2$  (qui représente les termes restant après simplification, ie. ceux qui n'apparaissent pas dans  $C_N$ ), on a  $|A_N B_N - C_N| \leq \sum_{(i,j) \in E} |a_i b_j| =$

$A'_N B'_N - C'_N$ . Par encadrement,  $A_N B_N - C_N \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$  donc  $C = AB$ . ■

### II.2.3 Exemple

Posons pour  $z \in \mathbb{C}$ ,  $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ . Montrer que  $\forall a, b \in \mathbb{C} f(a+b) = f(a)f(b)$ .

## II.3 Approximations et restes

### II.3.1 Valeur approchée de la limite

Supposons que  $\sum u_n$  converge vers  $S$ .

Alors pour  $N \in \mathbb{N}$ ,  $|S - S_N| = |R_N| = \left| \sum_{n=N+1}^{+\infty} u_n \right|$ . Si on sait majorer les restes d'une série convergente, alors on connaît un minorant de la qualité de l'approximation ainsi que de la vitesse de convergence de la série.

### II.3.2 Riemann

Soit  $\alpha > 1$  un réel.

Montrons que  $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \leq \frac{1}{\alpha-1} \frac{1}{n^{\alpha-1}}$ .

### II.3.3 Séries géométriques

On connaît une expression explicite du reste.

Si on a maintenant une suite vérifiant  $|u_{n+1}| \leq k|u_n|$  pour un  $k \in ]0, 1[$ , montrons que  $|R_N| \leq \frac{|u_{N+1}|}{1-k}$