

Table des matières

I Séries convergentes

I.1 Vocabulaire

Définition 1

Soit $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ une suite.

1. On appelle série de terme général u_n et on note $\sum u_n$ ou $\sum_{n \geq 0} u_n$ la **suite** (S_N) définie par

$$\forall N \in \mathbb{N} \quad S_N = \sum_{n=0}^N u_n$$

On dit que S_N (le nombre) est la N ième somme partielle de cette série.

Il est possible de commencer à sommer non pas à l'indice 0 mais à un indice entier fixé n_0 (ce qui revient à poser $u_n = 0$ pour $n \in \llbracket 0, n_0 - 1 \rrbracket$). Dans ce cas la série est notée $\sum_{n \geq n_0} u_n$.

2. On dit que la série $\sum u_n$ converge ssi la suite des somme partielles converge. Dans le cas contraire, on dit que la série diverge. Sa **nature** est d'être convergente ou divergente.

Quand elle existe, on note $S = \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$ la limite des sommes partielles et on l'appelle somme de la série.

3. Dans le cas d'une série convergente, la suite des restes de la série est la suite définie par $R_N = \sum_{n=N+1}^{+\infty} u_n = S - S_N$

Définition-Proposition 1

Soit $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

SI $u_n \not\rightarrow 0$ **ALORS** $\sum u_n$ diverge.

Dans ce cas on dit que $\sum u_n$ diverge grossièrement.

Proposition 1

Considérons 2 séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$.

- Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent alors $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{C} \quad \sum (\lambda u_n + \mu v_n)$ converge.
- Si $\sum u_n$ converge et $\sum v_n$ diverge alors $\sum (u_n + v_n)$ diverge.
- Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ divergent, on ne peut rien dire sur $\sum (u_n + v_n)$.

I.2 Séries de référence

I.3 Séries à termes positifs

Théorème 1

Soit $(u_n)_n$ une suite de réels **positifs**. $\sum u_n$ converge ssi la suite des sommes partielles est majorée.

$$\text{Dans ce cas, } \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sup \left(\left\{ \sum_{k=0}^N u_n \mid N \in \mathbb{N} \right\} \right).$$

Théorème 2 (Comparaison des séries à termes positifs)

Soient $(u_n)_n, (v_n)_n$ des suites de réels positifs.

1. Si $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang et $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge.
2. Si $u_n = O_{+\infty}(v_n)$ et $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge.
3. Si $u_n = o_{+\infty}(v_n)$ et $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge.
4. Si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$, $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ont la même nature.

Les résultats 2, 3 et 4 restent vrais pour des séries à termes tous négatifs.

Théorème 3 (Règle de d'Alembert)

Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n > 0$. Supposons que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \rightarrow \ell$.

1. Si $\ell < 1$ alors $\sum u_n$ converge.
2. Si $\ell > 1$ alors $\sum u_n$ diverge.
3. Si $\ell = 1$ la série peut être divergente ou convergente.

I.4 Application à l'étude de suites

Proposition 2

Soit $(u_n)_n$ une suite. $(u_n - u_0)_{n \in \mathbb{N}}$ à la même limite (ou absence de limite) que $\sum (u_{n+1} - u_n)$.

II Convergence absolue

II.1 Convergence d'une série complexe

Définition 2

Soit $\sum u_n$ une série complexe. On dit que cette série est absolument convergente ssi $\sum_{n \geq 0} |u_n|$ converge (prononcer module ou valeur absolue suivant les cas).

Théorème 4

Soit $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Si $\sum u_n$ converge absolument alors $\sum u_n$ converge et on a

$$\left| \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$$

II.2 Propriétés**Proposition 3**

Soient $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $(v_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ avec $\forall n \in \mathbb{N} v_n \geq 0$.

1. Si $|u_n| \underset{+\infty}{\sim} v_n$ et $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge.
2. Si $u_n = O_{+\infty}(v_n)$ et $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge.
3. Si $u_n = o_{+\infty}(v_n)$ et $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge.

Théorème 5

Soient $\sum a_n$ et $\sum b_n$ deux séries de complexes absolument convergente.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$. Alors la série $\sum c_n$ converge absolument et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \times \sum_{n=0}^{+\infty} b_n$$

II.3 Approximations et restes