Convergence

Exercice 1
Déterminer la nature des séries de terme général :

1. $u_n = \frac{1}{n^2 \ln(n)}$.
2. $u_n = 2^{-\ln(\ln(n))}$
3. $u_n = \ln(\cos(\frac{1}{n}))$
4. $u_n = \frac{1}{2+\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)}$.
5. $u_n = \frac{1}{\binom{2n}{n}}$
6. $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}\ln(n)}$
7. $u_n = \frac{n!x^n}{n^n}$ pour $x > 0$
8. $u_n = \frac{n^2 \ln(n)}{e^n}$

Pour conclure complètement sur 7., on pourra attendre l'exercice 3.

Exercice 2
Soient $\alpha, \beta \in]0, +\infty[$.

1. On suppose $\alpha \neq 1$. Etudier la convergence de $\sum\limits_{n \geqslant 2} \frac{1}{n^\alpha (\ln(n))^\beta}$.
2. On suppose que $\alpha = 1$. En comparant à une intégrale, déterminer la nature de $\sum\limits_{n \geqslant 2} \frac{1}{n(\ln(n))^\beta}$.
3. Résumer les informations précédentes dans un tableau, puis traiter les cas où $\alpha \leqslant 0$ ou $\beta \leqslant 0$.

Exercice 3
Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose $u_n = \ln\left(\frac{n!e^n}{n^n\sqrt{n}}\right)$. Montrer que (u_n) converge en étudiant une série.

Question bonus : en utilisant $\binom{2n}{n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}$, donner un équivalent de $n!$

Exercice 4
On note $H_N = \sum\limits_{n=1}^{N} \frac{1}{n}$ pour $N \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. Montrer que $H_{2N} - H_N \geqslant \frac{1}{2}$ et retrouver la divergence de la série harmonique.

Calcul de sommes

Exercice 5
Déterminer la nature et calculer la somme des séries de terme général :

1. $u_n = \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$.
2. $u_n = \frac{n}{2^n}$
3. $u_n = \frac{n^2+n+1}{n!}$
4. $u_n = e^{-2n}\operatorname{ch}(n)$

Pour 2, on pourra calculer $2S - S$ où S est la somme[1]. Pour 3, on pourra utiliser la base $(1, X, X(X-1))$ de $\mathbb{R}_2[X]$ pour exprimer le dénominateur.

Exercice 6
Montrer que $\sum_{n \geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n^2}$ converge et exprimer sa somme en fonction de $S = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Exercice 7
Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer la convergence puis calculer la somme de $\sum_{n \geqslant 0} \frac{\sin(nx)}{2^n}$

Exercice 8

1. Trouver $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $\forall n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ $u_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{n+2}$.
2. En déduire que $\sum u_n$ converge et calculer sa somme.

Exercice 9
Pour $n \in \mathbb{N}$, exprimer $\frac{(-1)^n}{n+1}$ comme l'intégrale d'une fonction simple. Montrer alors que $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{n+1}$ converge et calculer sa somme.

Exercice 10 ($\star$)
On pose $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Montrer la convergence de $\sum\limits_{n \geqslant 1} \frac{j^n}{n}$. On pourra étudier les sommes partielles et regrouper par 3.

Calculer ensuite la somme de cette série en exprimant $\frac{1}{n}$ comme l'intégrale d'une fonction simple.

Plus théorique

Exercice 11
Pour $N \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, on pose $H_N = \sum\limits_{n=1}^{N} \frac{1}{n}$.

1. Montrer que $\sum_{n \geqslant 2} \left((\ln(n) - \ln(n-1)) - \frac{1}{n}\right)$ converge.
2. En déduire que $H_n = \ln(n) + \gamma + o_{+\infty}(1)$ où $\gamma \in \mathbb{R}$.
3. Montrer que $\sum_{n \geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n}$ converge et calculer sa somme.

Exercice 12
Soit (a_n) une suite positive telle que $\sum a_n$ converge. Etudier la convergence des séries $\sum \sqrt{a_n a_{n+1}}, \sum a_n^2, \sum \frac{\sqrt{a_n}}{n}$.

[1] Pour les 5/2, trouver une méthode sans astuce

Exercice 13 ($\star$)
Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs positives et $u_0 > 0$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + \frac{a_n}{u_n}$.

Montrer que (u_n) converge ssi $\sum a_n$ converge.

Exercice 14

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et (u_n) une suite strictement positive qui vérifie $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1+\frac{\alpha}{n}+O_{+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)$. On pose $b_n = \ln(n^{-\alpha}u_n)$ pour $n \in \mathbb{N}$. Montrer que (b_n) converge en étudiant une série, puis donner un équivalent de (u_n).
2. Etudier la nature de la série $\sum \binom{2n}{n}\frac{1}{2^{2n}n}$ en utilisant la méthode précédente, et d'une deuxième manière en utilisant l'équivalent rappelé à l'exercice précédent.