Devoir surveillé n°1

Durée : 2H. Calculatrices interdites. **Les candidats sont invités à porter une attention particulière à la rédaction et la propreté : les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.**

Lisez l'énoncé attentivement et en entier **AVANT** de commencer chaque exercice.

Exercice 1 (Etude d'une série)
On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\forall n \geqslant 3 \ u_n = \frac{1}{n\ln(n)}$ et la série de terme général $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\sum\limits_{n\geqslant 3} u_n$.

Pour tout $N \in \mathbb{N}$ supérieur ou égal à 3, on pose $S_N = \sum\limits_{n=3}^{N} u_n$.

1. Montrer que $\frac{1}{n^2} = o_{+\infty}(u_n)$ et $u_n = o_{+\infty}(\frac{1}{n})$. Peut-on conclure quand à la nature de $\sum\limits_{n\geqslant 3} u_n$?
2. Montrer que la fonction $f : \left\{ \begin{array}{ccc} [2,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{x\ln(x)} \end{array} \right.$ est décroissante.
3. Donner un encadrement de u_n pour $n \geqslant 3$ faisant intervenir $\int\limits_{n}^{n+1} f(t)\mathrm{d}t$ et $\int\limits_{n-1}^{n} f(t)\mathrm{d}t$.
4. Donner une primitive de f sur $[2,+\infty[$. On pourra mettre f sous forme d'un produit.
5. Déduire des questions précédentes que, pour $N \geqslant 3$ on a
$$\ln(\ln(N+1)) - \ln(\ln(3)) \leqslant S_N \leqslant \ln(\ln(N)) - \ln(\ln(2))$$
6. Conclure quand à la nature de $\sum\limits_{n\geqslant 3} u_n$.
7. Donner un équivalent de S_N quand $N \to +\infty$.

Exercice 2 (Méthode de Newton)
Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et soit $f \in \mathcal{C}^2([a,b],\mathbb{R})$. On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative. On suppose de plus que

(i) $f(a) < 0 < f(b)$.

(ii) $\forall x \in [a,b] \ f'(x) > 0$

(iii) $\forall x \in [a,b] \ f''(x) > 0$

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la manière suivante :

- $u_0 = b$.
- pour $n \in \mathbb{N}$, on note T_n la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse u_n et alors u_{n+1} est l'abscisse du point d'intersection de T_n et de l'axe (Ox).

Partie I : un exemple

On considère, dans cette partie seulement, la fonction $f : \left\{ \begin{array}{ccc} [1,2] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 - 2 \end{array} \right.$.

1. Montrer que f vérifie toutes les hypothèses du préambule.
2. Tracer, sans justification la courbe représentative de f et construire graphiquement les nombres u_0, u_1, u_2 (les placer sur l'axe (Ox)).
3. Donner l'équation de T_n en fonction de u_n, pour un $n \in \mathbb{N}$. On pensera à vérifier la cohérence avec le tracé précédent dans le cas $n = 0$ au moins.
4. En déduire l'expression de u_{n+1} en fonction de u_n.
5. Calculer u_1, u_2, u_3.

Partie II : cas général

On se place maintenant dans le cas général où f vérifie toutes les hypothèses du préambule.

1. Montrer que l'équation $f(x)=0$ (d'inconnue $x\in[a,b]$) admet une unique solution ω dans l'intervalle **ouvert** $]a,b[$. La suite du problème consiste à trouver une méthode d'approximation de cette solution.
2. Montrer que l'on peut poser $m_1=\inf_{[a,b]} f'\in\mathbb{R}$ et $M_2=\sup_{[a,b]} f''\in\mathbb{R}$ et que ces nombres sont strictement positifs.
3. Quelle hypothèse sur f permet d'affirmer que la tangente T_n coupe toujours l'axe (Ox) ?
4. Nous allons établir la relation de récurrence générale.
   (a) Donner l'équation de la tangente T_n.
   (b) Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}\ u_{n+1}=u_n-\frac{f(u_n)}{f'(u_n)}$.
5. On pose $\varphi:\begin{cases}[a,b] & \to & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & x-\frac{f(x)}{f'(x)}\end{cases}$.
   (a) Etudier les variations de φ sur $[a,b]$.
   (b) Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}\ u_n\in]\omega,b]$.
   (c) Donner le signe de $g:x\mapsto\varphi(x)-x$ et en déduire les variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (d) Montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{\to} \omega$.
6. Essayons d'estimer la vitesse de convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. En effet, les valeurs de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont des approximations successives de ω et on souhaite savoir si ces approximations sont “bonnes”.
   (a) Pour $n\in\mathbb{N}$, exprimer $u_{n+1}-\omega$ en fonction de $u_n-\omega$ et sous la forme d'une seule fraction. On fera apparaître $f(u_n)-f(\omega)$.
   (b) Citer la formule de Taylor avec reste intégral, en précisant bien la ou les hypothèses sur la fonction considérée.
   On peut déduire de cette formule que si une fonction f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur l'intervalle I et que $a,b\in I$ et vérifie que l'on peut trouver un réel fixé M_{n+1} tel que pour tout t entre a et b on ait $|f^{(n+1)}(t)|\leqslant M_{n+1}$, alors
   $$\left|f(b)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k\right|\leqslant M_{n+1}\frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$
   Il s'agit de l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre $n+1$.
   (c) Appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange à f sur $[\omega,x_n]$ à l'ordre 2.
   (d) En déduire que $0\leqslant u_{n+1}-\omega\leqslant\frac{M_2}{2m_1}(u_n-\omega)^2$.
   (e) Montrer qu'il existe un rang N tel que $\forall n\geqslant N\ \left(\frac{M_2}{2m_1}(u_n-\omega)\right)^2<1$. On note $k=\left(\frac{M_2}{2m_1}(u_N-\omega)\right)^2\in]0,1[$.
   (f) Montrer qu'il existe une constante c telle que pour n assez grand $0<u_n-\omega<c\times k^{(2^n)}$.
   (g) Montrer que $(u_n-\omega)=o_{+\infty}(q^n)$ pour tout $q\in]0,1[$. Ainsi (u_n) converge plus vite que tout suite géométrique.
7. On suppose qu'on a obtenu $c=1$ et $k=\frac{1}{2}$. A partir de quel rang (on pourra donner une réponse non entière) u_n est une approximation de ω à 10^{-10} près ? à 10^{-100} près ? à 10^{-1000} près ?
   A partir de quels rangs la suite géométrique $v_n=(10^{-10})^n$ est-elle inférieur aux trois nombres précédent ?
8. On revient à la fonction $f:x\mapsto x^2-2$. On peut montrer facilement que $2-\sqrt{2}<\frac{2}{3}$.
   (a) En utilisant l'inégalité 6d, donner la précision de l'approximation de $\sqrt{2}$ par u_3. Et par u_4 ?
   (b) Si on se sert plutôt du fait que $x_1-\sqrt{2}<\frac{1}{4}$, quelle inégalité obtient-on pour u_3 ? et pour u_4 ?