

Table des matières

I Opérations	1
I.1 Produit, puissances	1
I.2 Inversibilité	1
I.3 Matrices et bases	1
II Trace	2
II.1 Trace d'une matrice	2
II.2 Trace d'un endomorphisme	2
III Déterminant	2
III.1 Déterminant de taille n	2
III.2 Propriétés calculatoires	2
III.3 Déterminant et espace vectoriel	3

I Opérations

I.1 Produit, puissances

Proposition 1

Soit $n \in \mathbb{N}, A, B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$. Si $AB = BA$ alors

$$(A + B)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} A^k B^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} A^{n-k} B^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{n-k} A^k B^{n-k}$$

Proposition 2

Soit $n \in \mathbb{N}, A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Si $AB = BA$ alors

$$A^n - B^n = (A - B) \sum_{k=0}^{n-1} A^k B^{n-1-k} = (A - B) \sum_{k=0}^{n-1} A^{n-1-k} B^k$$

I.2 Inversibilité

Définition 1

Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite inversible ssi il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que

$$AB = I_n = BA.$$

Dans ce cas on note $B = A^{-1}$ et pas $\frac{1}{A}$. En particulier on ne notera pas de quotients de matrices, mais des produits par l'inverse.

On note $GL_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées de taille n inversibles. Ce n'est pas un espace vectoriel!

Proposition 3

On dit que $GL_n(\mathbb{K})$ est un groupe pour \times :

1. $I_n \in GL_n(\mathbb{K})$
2. Le produit de deux matrices $A, B \in GL_n(\mathbb{K})$ inversibles est encore inversible et on a $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
3. Si $A \in GL_n(\mathbb{K})$ alors A^{-1} est inversible et $(A^{-1})^{-1} = A$.

Théorème 1

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Notons C_1, \dots, C_n les colonnes de A et L_1, \dots, L_n ses lignes. On a les équivalences suivantes

$$\begin{aligned} A \in GL_n(\mathbb{K}) &\iff A \underset{L}{\sim} I_n \text{ (équivalente par ligne)} \iff A \underset{C}{\sim} I_n \\ &\iff (C_1, \dots, C_n) \text{ est une base de } M_{n,1}(\mathbb{K}) \\ &\iff (L_1, \dots, L_n) \text{ est une base de } M_{1,n}(\mathbb{K}) \\ &\iff \text{rg}(A) = n \iff \ker(A) = \{0_{\mathbb{K}^n}\} \\ &\iff \forall Y \in \mathbb{K}^n \exists! X \in \mathbb{K}^n AX = Y \\ &\iff \exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) AB = I_n \end{aligned}$$

I.3 Matrices et bases

Définition 2

Soit E un \mathbb{K} -ev de dimension finie égale à n et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E . Soit $(u_1, \dots, u_p) \in E^p$ une famille de vecteurs. Pour $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket$ on note a_{ij} la i ème coordonnée de u_j .

Alors la matrice $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est appelé matrice de la famille (u_1, \dots, u_p)

dans la base \mathcal{B} et est noté $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_p)$.

C'est la matrice des colonnes des coordonnées des x_j .

Proposition 4

Le rang d'une famille est le même que le rang de sa matrice dans une base. En particulier, ce rang ne dépend pas de la base choisie.

Définition 3

1. Soient E, F deux \mathbb{K} -ev de dimension finie de dimension respectives p et n . On note $\mathcal{B}_E = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E et $\mathcal{B}_F = (u_1, \dots, u_n)$ une base de F . Soit également $f \in \mathcal{L}(E, F)$. La matrice de f dans \mathcal{B}_E et \mathcal{B}_F (noté $\text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f)$) est la matrice $\text{Mat}_{\mathcal{B}_F}(f(e_1), \dots, f(e_p)) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

C'est la matrice des coordonnées des $f(e_j)$ dans u_1, \dots, u_n , écrites en colonnes.

2. Si $f \in \mathcal{L}(E)$, on note $\text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_E}(f) = \text{Mat}_{\mathcal{B}_E}(f) \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$.

Théorème 2

Soient E, F, G trois \mathbb{K} -ev de dimensions respectives q, p, n et de bases $\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F, \mathcal{B}_G$. Soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$.

On pose de plus $M_f = \text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f) \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $M_g = \text{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_G}(g) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Alors $C = \text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_G}(g \circ f) = M_g M_f \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$

Rappel : si $C = AB$, $c_{i,j} = \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj}$.

Théorème 3

Soit $f : E \rightarrow F$ une application linéaire entre ensemble de dimensions finies de bases respectives \mathcal{B}_E et \mathcal{B}_F . f est un isomorphisme ssi $M_f = \text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f)$ est inversible.

Dans ce cas $\text{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E}(f^{-1}) = M_f^{-1}$.

Définition 4

Soit E un \mathbb{K} -ev de dimension finie et $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ deux bases de E . On appelle matrice de passage de \mathcal{B} à \mathcal{B}' la matrice $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$ de \mathcal{B}' dans \mathcal{B} .

On exprime la **nouvelle base** \mathcal{B}' en fonction de l'**ancienne base**

Théorème 4

Soient E un \mathbb{K} -ev $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ deux bases de E . On note P la matrice de passage de \mathcal{B} à \mathcal{B}' .

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On pose $M = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ et $M' = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$. Alors $M' = P^{-1}MP$

Définition 5

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A est semblable à B ssi il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $A = P^{-1}BP$.

A et B représentent un même endomorphisme dans deux bases différentes.

II Trace**II.1 Trace d'une matrice****Définition 6**

Soit $A = (a_{i,j})_{(i,j) \in [1,n]^2} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle la trace de A et on note $\text{tr}(A)$ le **nombre**

$\sum_{i=1}^n a_{i,i}$ qui est la somme de ses coefficients diagonaux.

Proposition 5

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- $\text{tr}({}^tA) = \text{tr}(A)$
- $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} \quad \text{tr}(\alpha A + \beta B) = \alpha \text{tr}(A) + \beta \text{tr}(B)$.

Ainsi la trace est une forme linéaire : $\text{tr} \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \mathbb{K})$

II.2 Trace d'un endomorphisme**Théorème 5**

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

$$\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$$

Définition-Proposition 1

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension n et $f \in \mathcal{L}(E)$. Le scalaire $\text{tr}(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f))$ ne dépend pas de la base \mathcal{B} de E choisie pour calculer la matrice. On le note $\text{tr}(f)$.

III Déterminant**III.1 Déterminant de taille n** **Définition-Proposition 2**

Il existe une unique application $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ telle que

- $\det(I_n) = 1$
- \det est linéaire par rapport à chaque colonne.
- \det est anti-symétrique ie change de signe si on échange deux colonne de sa variable.

Proposition 6

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On fait subir une opération élémentaire sur les colonnes de A et on note A' la matrice obtenue.

- Si l'opération est $C_i \leftrightarrow C_j$ avec $i \neq j$ alors $\det(A') = -\det(A)$.
- Si l'opération est $C_i \leftarrow \lambda C_i$ avec $\lambda \neq 0$ alors $\det(A') = \lambda \det(A)$
- Si l'opération est $C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$ et $i \neq j$ alors $\det(A') = \det(A)$.

Corollaire 1

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ alors $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$

Théorème 6

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. A est inversible ssi $\det(A) \neq 0$.

Proposition 7

Le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit de ses coefficients diagonaux.

III.2 Propriétés calculatoires**Théorème 7**

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors $\det(A) = \det({}^tA)$.

Théorème 8

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec $n \geq 2$, $A = (a_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2}$. Pour $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ on note $A_{i,j}$ la matrice de $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ déduite de A en supprimant la i ème ligne et la j ème colonne.

1. $\det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{i,j} \det A_{i,j}$ (développement par rapport à la j ème colonne)
2. $\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{i,j} \det A_{i,j}$ (développement par rapport à la i ème ligne)

Corollaire 2

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Alors $\det(\overline{A}) = \overline{\det(A)}$.

Théorème 9

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. $\det(AB) = \det(A) \det(B)$.

Corollaire 3

Si A est inversible alors $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$.

III.3 Déterminant et espace vectoriel**Définition 7**

Soit E un \mathbb{K} -ev de dimension n et $\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_n)$ une famille de n vecteurs. Soit \mathcal{B} une base. On appelle déterminant de \mathcal{F} dans la base \mathcal{B} le nombre $\det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n) = \det(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n))$.

Proposition 8

Soit \mathcal{B} une base de E et \mathcal{B}' une famille de n vecteurs.

$$\mathcal{B}' \text{ est une base de } E \text{ ssi } \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \neq 0$$

Théorème 10

Deux matrices carrées semblables ont le même déterminant.

Définition 8

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ avec E un \mathbb{K} -ev de dimension n . Toutes les matrices de f (ie dans n'importe quelle base) ont le même déterminant, on le note $\det(f)$ et on l'appelle déterminant de f .

Proposition 9

Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$ avec E de dimension n .

1. $\det(\text{Id}_E) = 1$
2. Pour $\lambda \in \mathbb{K}$, $\det(\lambda f) = \lambda^n \det(f)$.
3. $\det(f \circ g) = \det(f) \det(g)$
4. f est bijective (on dit aussi inversible) ssi $\det(f) \neq 0$ et alors $\det(f^{-1}) = \frac{1}{\det(f)}$.