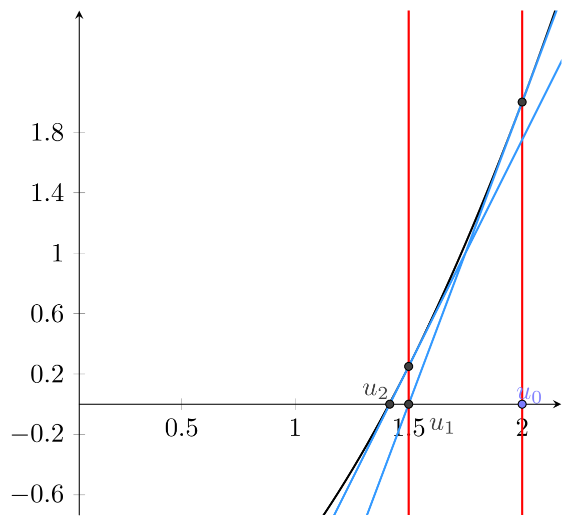
Exercice 1

1. On a effectivement $n^2u_n = \frac{n}{\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$ et $nu_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ par croissances comparées.
2. f est de classe $\mathcal{C}^1$ en par produit et inverse d'une fonction $\mathcal{C}^1$ qui ne s'annule pas. De plus, pour $x \geqslant 2$, $f'(x) = -(\ln(x)+1)\frac{1}{x^2\ln^2(x)} < 0$ car $\ln(x) > 0$ pour $x \geqslant 2$. Ainsi f est strictement décroissante.
3. Pour $t \in [n, n+1]$ on a $f(t) \leqslant f(n)$ par décroissance de f et donc, par croissance de l'intégrale $\int\limits_n^{n+1} f \leqslant f(n) = u_n$.

   De même, et comme $n-1 \geqslant 2$ on a bien $\int\limits_{n-1}^{n} f \geqslant u_n$. Finalement
$$\int_n^{n+1} f(t)\mathrm{d}t \leqslant u_n \leqslant \int_{n-1}^{n} f(t)\mathrm{d}t$$
4. Vérifions que $F : x \mapsto \ln(\ln(x))$ est une primitive de f sur $I = [2, +\infty[$. On a $\ln(I) \subset]0, +\infty[$ donc F est bien $\mathcal{C}^1$ sur I et pour $x \geqslant 2$, $F'(x) = \ln'(x) \times \frac{1}{\ln(x)} = \frac{1}{x\ln(x)}$ et donc F est bien une primitive de f sur $[2, +\infty[$.
5. On somme l'encadrement de la question 3 pour n entre 3 et N :
$$\sum_{n=3}^{N} (\ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(n))) \leqslant S_N \leqslant \sum_{n=3}^{N} (\ln(\ln(n)) - \ln(\ln(n-1)))$$
   et les sommes sont télescopiques : on obtient le résultat désiré.
6. Pour $N > 2$, on divise l'encadrement précédent par $\ln(\ln(N)) > 0$. De plus,
$$\frac{\ln(\ln(N))}{\ln(\ln(N))} = \frac{\ln(\ln(N) + \ln(1+\frac{1}{N}))}{\ln(\ln(N))} = \frac{\ln(\ln(N)) + \ln(1 + \frac{\ln(1+\frac{1}{N})}{\ln(N)})}{\ln(\ln(N))} \underset{N\to+\infty}{\to} 1$$
   Ainsi, d'après le théorème d'encadrement, $\frac{S_N}{\ln(\ln(N))} \underset{N\to+\infty}{\to} 1$ et on a $S_N \underset{+\infty}{\sim} \ln(\ln(N))$.

Exercice 2

Partie I

1. $f \in \mathcal{C}^\infty([1,2], \mathbb{R})$ donc elle est en particulier $\mathcal{C}^2$. De plus pour $x \in [1,2]$, $f(x) = 2x$ et $f''(x) = 2$. Ces deux fonctions sont bien strictement positives sur $[1,2]$. Finalement, f vérifie bien les hypothèses.
2. 

3. T_n est la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point u_n donc est d'équation $y = 2x_n(x - x_n) + x_n^2 - 2$.
4. u_{n+1} est l'abscisse du point de T_n vérifiant $y = 0$ donc $0 = 2u_n(u_{n+1} - u_n) + u_n^2 - 2$. On en déduit (en supposant pour le moment $u_n \neq 0$) que
$$u_{n+1} = \frac{2 - u_n^2}{2u_n} + u_n = \frac{1}{u_n} + \frac{u_n}{2}$$
5. On a $u_0 = 2$ donc $u_1 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$. Ainsi $u_2 = \frac{2}{3} + \frac{3}{4} = \frac{17}{12}$ et finalement $u_3 = \frac{12}{17} + \frac{17}{24} = \frac{288+289}{408} = \frac{577}{408}$.

Partie II

1. On sait que f est continue sur $[a,b]$ et $f(a)f(b) < 0$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, f s'annule au moins une fois sur $[a,b]$. D'après les hypothèses, $f(a) \neq 0$ et $f(b) \neq 0$ donc f s'annule au moins une fois sur l'intervalle ouvert $]a,b[$.

   De plus, f est strictement croissante sur $]a,b[$ car $f' > 0$ sur cet intervalle. Ainsi l'équation $f(x) = 0$ admet exactement une solution dans $]a,b[$.
2. f' et f'' sont continues et définies sur un segment. Ainsi elles sont bornées et atteignent leurs bornes. on en déduit que m_1 et M_2 existent et sont atteintes comme valeurs de f' et f'' respectivement. Donc $m_1 > 0$ et $M_2 > 0$ car f' et f'' ne prennent que des valeurs strictement positives.
3. On sait que f' ne s'annule pas, donc T_n n'est jamais horizontale et coupe donc toujours (Ox).
4. (a) Dans le cas général l'équation de T_n est $y = f'(u_n)(x - u_n) + f(u_n)$.

   (b) On en déduit de la même manière que $u_{n+1} = -\frac{f(u_n)}{f'(u_n)} + u_n$ avec f' qui ne s'annule pas.
5. Remarque : la définition de φ n'est pas innocente...

   (a) φ est dérivable sur $[a,b]$ en tant que somme et quotient dont le dénominateur ne s'annule pas. On obtient.

$$\forall x \in [a,b] \ \varphi'(x) = 1 - \frac{f'(x)^2 - f(x)f''(x)}{f'(x)^2} = \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2}$$

   On en déduit le tableau de variations suivant :

x	a		ω		b
$\varphi(x)$	$\varphi(a)$	$\searrow$	ω	$\nearrow$	$\varphi(b)$

   (b) On a $\varphi(b) = b - \frac{f(b)}{f'(b)}$ et le quotient qui apparaît est strictement positif. Ainsi $\varphi(b) < b$ et donc $\varphi(]\omega,b]) \subset]\omega,b]$. On en déduit que l'intervalle $]\omega,b]$ est stable par φ.

   De plus $u_0 = b \in]\omega,b]$ et $\forall n \in \mathbb{N}\ u_{n+1} = \varphi(u_n)$. Ainsi, par récurrence (à rédiger rapidement), $\forall n \in \mathbb{N}\ u_n \in]\omega,b]$.

   (c) On voit que $\forall x \in]\omega,b]\ g(x) = \varphi(x) - x = -\frac{f(x)}{f'(x)} < 0$ et donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \varphi(u_n) - u_n < 0$. Ainsi $(u_n)_n$ est strictement décroissante et minorée donc converge.

   (d) Comme de plus φ est continue et possède un unique point fixe ω, on en déduit que $u_n \underset{n\to\infty}{\to} \omega$.
6. (a) On a $u_{n+1} - \omega = u_n - \omega - \frac{f(u_n)}{f'(u_n)} = \frac{f'(u_n)(u_n-\omega)-f(u_n)}{f'(u_n)} = \frac{f'(u_n)(u_n-\omega)-f(u_n)+f(\omega)}{f'(u_n)}$.

   (b) Pour une fonction f de classe $n+1$ sur un intervalle I contenant a et b, on a

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t$$

   (c) f est bien $\mathcal{C}^2$ sur l'intervalle considéré. On a donc $\|f(u_n) - f(\omega) - f'(\omega)(u_n - \omega)\| \leqslant M_2\frac{(u_n-\omega)^2}{2}$. On peut également appliquer à l'envers : $\|f(\omega) - f(u_n) - f'(u_n)(\omega - u_n)\| \leqslant M_2\frac{(u_n-\omega)^2}{2}$.

   (d) On a déjà $0 < u_{n+1} - \omega$ d'après la question 5c.

   D'après Taylor-Lagrange on a donc $u_{n+1} - \omega \leqslant \frac{M_2(u_n-\omega)^2}{2f'(u_n)} \leqslant \frac{M_2}{2m_1}(u_n - \omega)^2$ en minorant le dénominateur.

   (e) La suite $(u_n - \omega)$ tend vers 0 donc $\frac{M_2}{2m_1}(u_n - \omega)^2 \underset{+\infty}{\to} 0$. Ainsi à partir d'un certain rang N sa valeur absolue (qui est la suite elle même) est strictement plus petite que 1.

   (f) Etudions la situation pour $n > N$. Supposons que n soit suffisamment grand pour appliquer successivement l'inégalité précédente plusieurs fois :

$$0 < u_n - \omega \leqslant \frac{M_2}{2m_1}(u_{n-1} - \omega)^2 \leqslant \frac{M_2}{2m_1}(\frac{M_2}{2m_1}(u_{n-2} - \omega)^2)^2$$

   On obtient donc $u_n - \omega \leqslant (\frac{M_2}{2m_1})^3(u_{n-2} - \omega)^4 \leqslant (\frac{M_2}{2m_1})^7(u_{n-3} - \omega)^8$. On "redescend" jusqu'à N : $(u_n - \omega) \leqslant (\frac{M_2}{2m_1})^{(2^{n-N}-1)}(u_N - \omega)^{2^{n-N}}$ (que l'on peut facilement prouver par récurrence pour tout $n \geqslant N$) On obtient donc $u_n - \omega \leqslant ck^{2^n}$ (en posant en fait $k = (\frac{M_2}{2m_1})^2(x_N - \omega)^2$ et c un produit compliqué faisant apparaître tous les premiers termes).

   cf preuve du théorème de d'Alembert sur les suites.

(g) On effectue le quotient : $\frac{u_n-\omega}{q^n} \leqslant \frac{ck^{(2^n)}}{q^n}$. On peut calculer le logarithme de ce quotient (les nombres sont tous positifs.) On trouve $\ln(c) + 2^n \ln(k) - n\ln(q) \underset{+\infty}{\sim} 2^n \ln(k) \underset{+\infty}{\rightarrow} -\infty$.

Donc le quotient de départ tend vers 0 et ainsi $u_n - \omega = o_{+\infty}(q^n)$.

7. On cherche n tel que $ck^{(2^n)} < 10^{-10} \iff \ln c + 2^n \ln k < -10\ln 10 \iff -2^n \ln 2 < -10\ln 10 \iff n > \log_2(10\frac{\ln(10)}{\ln(2)}) = \log_2(10) + \log_2(\log_2(10))$

Pour 10^{1000} on trouve $n > 2\log_2(100) + \log_2(\log_2(10))$ et pour 10^{-1000} on trouve $3\log_2(10) + \log_2(\log_2(10))$.

Ainsi multiplier la précision par 10 revient à effectuer $\log_2(10) \approx 3$ itérations (on a $2^3 = 8$ et $2^4 = 16$ donc $\log_2(10) \in [3, 4]$).

Si on compare à $v_n = (10^{-10})^n$ on trouve $n = 1$ dans le premier cas, $n = 10$ dans le second et $n = 100$ dans le dernier. Pour multiplier la précision par 10 on doit faire 10 fois plus de calcul.

8. (a) On a $u_0 - \sqrt{2} < \frac{2}{3}$. De plus $M_2 = 4$ et $m_1 = 2$ donc $\frac{M_2}{2m_1} = 1$. Ainsi $u_1 - \sqrt{2} < (u_0 - \sqrt{2})^2 = \frac{4}{9}$. $u_2 - \sqrt{2} < (u_1 - \sqrt{2})^2 = \frac{16}{81}$. De la même manière $u_3 - \sqrt{2} < \frac{256}{6561}$ et $u_4 - \sqrt{2} < \frac{65536}{43046721}$ (exprimable sous forme de puissances).

(b) On a alors $u_2 - \sqrt{2} < \frac{1}{16}$ puis $u_3 - \sqrt{2} < \frac{1}{256}$ et enfin $u_4 - \sqrt{2} < \frac{1}{65536}$