Devoir maison n°1

A rendre le 04/10

Exercice 1

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = \frac{1}{2}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n - u_n^2$. On pose également $f : x \mapsto x - x^2$, définie sur $[0, 1]$.

1. (a) Etudier f sur $[0, 1]$. Vous préciserez le maximum de f en plus de sa monotonie (et du graphe, bien entendu).
   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n \leqslant \frac{1}{n+1}$.
   (c) Quelle est la limite de (u_n) ?
   (d) Montrer que la série $\sum u_n^2$ converge et calculer la somme $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n^2$.
2. (a) Pour $n \geqslant 0$, calculer $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \ln\left(\frac{u_{k+1}}{u_k}\right)$.
   (b) En déduire la nature de la série $\sum \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$.
   (c) Déterminer la nature de la série $\sum u_n$.
3. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = nu_n$.
   (a) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} - w_n = u_n(1 - (n+1)u_n)$.
   (b) Justifier que (w_n) converge vers un réel noté l. On pourra étudier sa monotonie dans un premier temps.
   (c) Montrer que $l > 0$.
   (d) Donner un équivalent de u_n en fonction de l.
   (e) Montrer que la série $\sum (w_{n+1} - w_n)$ converge.
   (f) En déduire que $l = 1$. On pourra raisonner par l'absurde et calculer un équivalent de $w_{n+1} - w_n$.