

## Matrices

### Exercice 1

On note  $(E_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1,n \rrbracket^2}$  la base canonique de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Calculer  $E_{i,j}E_{k,l}$  pour  $i, j, k, l \in \llbracket 1, n \rrbracket$ .

Calculer  $AE_{i,j}$  et  $E_{i,j}A$  pour  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

### Exercice 2

On considère la matrice  $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 9 & -3 & 15 \\ -3 & 1 & -5 \end{pmatrix}$

- Calculer  $\text{rg}(A)$ .
- Montrer qu'il existe deux colonnes  $U, V \in \mathbb{R}^3$  telles que  $A = UV$ .
- En déduire  $A^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

### Exercice 3

Montrer l'inversibilité et calculer l'inverse de  $\begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ & \ddots & \vdots \\ (0) & & 1 \end{pmatrix}_{[n]}$

### Exercice 4

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  telle que  $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \quad AM = MA$ .

- Déterminer toutes les matrices semblable à  $A$ .
- En utilisant l'exercice 1, montrer qu'il existe  $\lambda \in \mathbb{K}$  telle que  $A = \lambda I_n$  ( $A$  est la matrice de l'homothétie de rapport  $\lambda$  dans toute base de  $\mathbb{K}^n$ ).

### Exercice 5 (★)

Soit  $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . On suppose que  $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad |a_{i,i}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{i,j}|$ . Montrer que  $A$  est

inversible.

On pourra raisonner par l'absurde et considérer la coordonnées de plus grand module d'un vecteur non nul du noyau de  $A$ .

## Matrice d'une application

### Exercice 6

Soit  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$  dont la matrice dans la base canonique est  $M = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ . Montrer que

$\mathcal{B} = (u, v) = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$  est une base de  $\mathbb{R}^2$  et calculer  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ .

Calculer rapidement  $\ker(f)$  et  $\text{Im}(f)$ .

### Exercice 7

Montrer que les matrices  $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$  ne sont pas semblables.

### Exercice 8

Soit  $A \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$  dont les coefficients sont donnés par  $a_{i,j} = \binom{j-1}{i-1}$  et  $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n)$  l'application canoniquement associée à  $A$ .

- Pour  $P \in \mathbb{R}_n[X]$ , exprimer  $\varphi(P)$ .
- En déduire les coefficients de  $A^k$  pour  $k \in \mathbb{N}$ .
- Même question avec  $k = -1$  (que faut-il prouver avant ?) puis  $k \in \mathbb{Z}$ .

## Trace

### Exercice 9

Soit  $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$  et  $\varphi : \begin{cases} \mathcal{M}_2(\mathbb{K}) & \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{K}) \\ M & \mapsto AM \end{cases}$ .

- Montrer que  $\varphi \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$  et calculer sa trace.
- Calculer  $A^2$  et en déduire  $\varphi^2$ .  $\varphi$  est-elle bijective ?
- Bonus 5/2 : étudier  $s = \frac{1}{5}\varphi$ .

### Exercice 10

On considère deux matrices  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  telles que  $AB - BA = A$ . Calculer  $\text{tr}(A^p)$  pour tout  $p \in \mathbb{N}$ .

### Exercice 11

Soient  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Montrer que  $(\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \quad \text{tr}(AM) = \text{tr}(BM)) \iff A = B$ .

### Exercice 12 (★)

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  fixée. Trouver toutes les matrices  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  telles que  $M + {}^tM = \text{tr}(M)A$ .

## Determinant

### Exercice 13

Calculer (et factoriser)  $\begin{vmatrix} 144 & 121 & 100 \\ 36 & 33 & 30 \\ 96 & 99 & 90 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} m & 1 & 2 \\ -1 & m+1 & 3 \\ 2m & 2 & 1-m \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \sin a & \sin b & \sin c \\ \cos a & \cos b & \cos c \end{vmatrix}$

**Exercice 14**

Soient  $A, B, C$  trois points du plan de coordonnées  $\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_C \\ y_C \end{pmatrix}$  dans un repère

orthonormé direct. Montrer que  $A, B, C$  sont alignés ssi  $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_A & x_B & x_C \\ y_A & y_B & y_C \end{vmatrix} = 0$ .

Etendre ce résultat à  $\mathbb{R}^3$ .

**Exercice 15**

Soit  $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ . Déterminer les valeurs de  $\lambda \in \mathbb{R}$  telles que  $\lambda I_3 - A$  ne soit

pas inversible.

**Exercice 16**

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  une matrice anti-symétrique. Montrer que si  $A$  est inversible alors  $n$  est pair.

**Exercice 17**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n$  et  $f \in \mathcal{L}(E)$  telle que  $f^2 = -Id_E$ . Montrer que  $n$  est pair.

**Plus technique**

**Exercice 18**  
On note  $d_n = \begin{vmatrix} 5 & 2 & & & (0) \\ 2 & 5 & 2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 2 & 5 & 2 \\ (0) & & & 2 & 5 \end{vmatrix}_{[n]}$ . Calculer  $d_1, d_2$ , trouver une relation de récurrence puis calculer  $d_n$  en fonction de  $n$ .

**Exercice 19**

Soient  $a, b \in \mathbb{C}$ . Calculer  $\begin{vmatrix} a & & (b) \\ & \ddots & \\ (b) & & a \end{vmatrix}_{[n]}$

**Exercice 20**

Calculer le déterminant  $\begin{vmatrix} 0 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ a_1 & 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & a_2 & \ddots & a_{n-1} & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & a_n \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & 0 \end{vmatrix}$ .

**Exercice 21**

Soient  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$  deux à deux distincts On note  $V_n(a_1, \dots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & \cdots & a_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}_{[n]}$ .

1. Calculer  $V_2(a_1, a_2)$  et  $V_3(a_1, a_2, a_3)$  sous forme factorisée.
2. On note  $C_0, \dots, C_{n-1}$  les colonnes de  $V_n(a_1, \dots, a_n)$ . En effectuant les opérations  $C_{j+1} \leftarrow C_{j+1} - a_1 C_j$  de la droite vers la gauche, trouver une relation de récurrence liant  $V_n$  à  $V_{n-1}$ .

3. Exprimer  $V_n(a_1, \dots, a_n)$ . Ce déterminant peut-il être nul ?

4. On pose  $\varphi : \begin{cases} \mathbb{K}_{n-1}[X] & \rightarrow \mathbb{K}^n \\ P & \mapsto \begin{pmatrix} P(a_1) \\ \vdots \\ P(a_n) \end{pmatrix} \end{cases}$ . Calculer  $\det(\varphi)$  et en déduire que  $\varphi$  est bijective.

**Exercice 22**

Soient  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$  et  $a, b \in \mathbb{R}, a \neq b$ . Pour  $x \in \mathbb{R}$  on pose  $\Delta_n(x) = \begin{vmatrix} \lambda_1 + x & & (a + x) \\ & \ddots & \\ (b + x) & & \lambda_n + x \end{vmatrix}_{[n]}$

1. Montrer que  $\Delta_n(x)$  est une expression affine de  $x$ .
2. Calculer  $\Delta_n(x)$  et en déduire  $\Delta_n(0)$ .