Devoir surveillé n°2

Durée : 4H. Calculatrices interdites. **Les candidats sont invités à porter une attention particulière à la rédaction et la propreté : les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.**

Lisez l'énoncé attentivement et en entier **AVANT** de commencer chaque exercice.

Exercice 1 (Questions de cours)

1. Etudier la convergence des séries de terme général :

   (a) $u_n = \frac{2n+4}{n^3+n+1}$. (b) $u_n = \frac{(-1)^n(n^2+2)}{n!}$.

2. Donner une base du plan $\mathcal{P} : x - 3z = 0$ de $\mathbb{R}^3$ ainsi qu'un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D} : \begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ 2x + 3y - z = 0 \end{cases}$

3. Pour $a \in \mathbb{R}$ on considère la droite du plan $\mathcal{D}_a : ax - y = 0$. Donner une interprétation de a, et donner une condition sur $a, b \in \mathbb{R}$ pour que les droites $\mathcal{D}_a$ et $\mathcal{D}_b$ soient perpendiculaires.

4. On note $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}_2[X] \\ P(X) & \mapsto & X \times (P(X+1) - P(X)) \end{array} \right.$. Calculer la trace et le rang de φ, en admettant que φ est bien linéaire.

Exercice 2

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on dit que $R \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une racine carrée de A ssi $R^2 = A$.

Partie I : quelques généralités

1. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Montrer que la matrice $M_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$ est une racine carrée de I_2.
2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et R une racine carrée de A. Montrer que si A est inversible ssi R est inversible.
3. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ deux matrices semblables via la matrice $P \in GL_n(\mathbb{K})$, par la relation $A = P^{-1}BP$. Soit $R \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   Montrer que R est une racine carrée de A ssi PRP^{-1} est une racine carrée de B.
4. Soit $D = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ avec $\alpha < \beta < \gamma$. Montrer que si $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifie $DM = MD$ alors M est une matrice diagonale.

Partie II : étude d'un cas particulier

On pose $A = \begin{pmatrix} 11 & -5 & 5 \\ -5 & 3 & -3 \\ 5 & -3 & 3 \end{pmatrix}$

1. Calculer le rang de A. On note $\ker(A) = \{X \in \mathbb{R}^3 | \ AX = 0_{\mathbb{R}^3}\}$ le noyau de A. Quelle est sa dimension ?
2. Donner une base de $\ker(A)$.
3. Résoudre l'équation $AX = X$ d'inconnue $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, en donnant une base de l'ensemble des solutions.
4. Nous venons de calculer le noyau d'une certaine matrice. Laquelle ?
5. Reprendre les deux questions précédentes pour l'équation $AX = 16X$.
6. On pose $u = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $w = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Montrer que $\mathcal{B} = (u, v, w)$ est une base.
7. On note $\mathcal{B}_c$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A, ie. $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_c}(f)$ et $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ X & \mapsto & AX \end{array} \right.$
   Calculer $D = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.

8. On note $P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_c}(\mathcal{B})$. Expliciter le lien entre A, D et P.
9. Supposons que $S \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ soit une racine carrée de D. Montrer que $SD = DS$ puis déduire de la première partie toute les racines carrées de D.
10. Exprimer les racines carrées de A en fonction de P.

Exercice 3
Le but de cet exercice est de proposer une méthode effective de calcul d'une valeur approchée de π.

Partie I

Dans cette partie, on établit ou on rappelle quelques résultats utiles pour la suite.

1. Soient q un réel et n un entier naturel. Que vaut $\sum\limits_{k=0}^{n} q^k$? Une réponse précise, mais sans justification est attendue.
2. Rappeler, sans justification, pour quelles valeurs du réel α la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge.
3. Donner l'ensemble de définition, de dérivabilité, la dérivée et le tableau de variations complet (y compris les limites aux bornes) de la fonction arctan.
4. Dans cette question, on considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels qui est décroissante et qui tend vers 0. On pose $\forall n \in \mathbb{N}\ v_n = (-1)^n u_n$.
   (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}\ u_n \geqslant 0$. Peut-on conclure sur la nature de $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$? Justifier votre réponse.
   (b) On note, pour $n \in \mathbb{N}$, $s_n = \sum\limits_{k=0}^{n} v_k$. Montrer que les suites $(s_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(s_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.
   (c) En déduire que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} v_n$ converge vers un réel s qui vérifie $\forall n \in \mathbb{N}\ s_{2n+1} \leqslant s \leqslant s_{2n}$.
   (d) On note, pour $n \in \mathbb{N}$, $r_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} v_k = s - s_n$. Montrer que
      — r_n est du signe de v_{n+1}.
      — $|r_n| \leqslant |v_{n+1}|$.

Partie II

Etude de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

1. La série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ est elle absolument convergente ?
2. En utilisant la partie I, justifier que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ converge.
3. Soit $k \in \mathbb{N}$. Calculer $I_k = \int\limits_0^1 t^{2k}\mathrm{d}t$ ainsi que l'intégrale $\int\limits_0^1 \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t$.
4. Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}$. Montrer que $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k I_k$ puis
$$S_n = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t + (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\mathrm{d}t$$
5. Démontrer que pour tout entier naturel n,
$$0 \leqslant \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{2n+3}$$
6. Montrer que $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$
7. Dans cette question on s'intéresse au calcul effectif d'une valeur approchée de π en utilisant la somme de la série précédente.
   (a) Montrer que pour $n \in \mathbb{N}$, $|4S_n - \pi| \leqslant \frac{4}{2n+3}$.
   (b) Expliquer comment obtenir une valeur approchée de π à 10^{-6} près. Donner ensuite un code python permettant de calculer cette valeur approchée.

Partie III

Nous allons maintenant reprendre la méthode précédente, en essayant d'obtenir une suite qui converge plus rapidement vers π

1. Pour $t \in]-1,1[$, exprimer $\frac{1}{1+t^2}$ sous forme d'une somme de série (en justifiant soigneusement que votre formule est valable sur l'intervalle demandé).

   On peut en déduire, par une méthode similaire à celle de la partie II, que

$$\forall x \in]-1,1[\ \arctan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

2. Que vaut $\arctan(\frac{\sqrt{3}}{3})$? Exprimer alors π comme somme d'une série convergente. Simplifier l'expression pour ne pas avoir de racine carrée **dans** la somme.

3. On note, pour $N \in \mathbb{N}$, $s_N = 2\sqrt{3} \sum\limits_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{(2n+1)3^n}$.

   Donner un majorant de $|\pi - s_N|$, en utilisant la question 4 de la partie I.

4. Montrer que $|\pi - s_N| \leqslant \frac{2\sqrt{3}}{3^{N+2}}$. Donner ensuite un majorant du nombre de termes dans la somme s_N pour que s_N soit une approximation de π à 10^{-6} près. Comparer à la méthode de la partie précédente.

5. Ecrire une fonction python **pi(eps)** qui prend un argument `eps` et retourne une valeur approchée v de π telle que $|\pi - v| \leqslant eps$. On utilisera la série convergente de cette partie, et on calculera le moins de terme possible. Pour le calcul de $\sqrt{3}$, on utilisera la fonction **math.sqrt**.

Remarque : pour obtenir une bonne valeur approchée de $\sqrt{3}$ sous forme de fraction, on peut utiliser la suite classique $u_0 = 3, \forall n \in \mathbb{N}\ u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{3}{2u_n}$, obtenue en appliquant la méthode de Newton étudiée au DS précédent à la fonction $f : x \mapsto x^2 - 3$ sur l'intervalle $[1,3]$