Devoir maison n°3

A rendre le 05/11

Exercice 1
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Si f est un endomorphisme de E, on a $f^0 = 1$, f sera noté f^1, $f \circ f$ sera noté $f^2, \dots$ ainsi pour p entier strictement positif, $f^{p+1} = f \circ f^p = f^2 \circ f^{p-1} = \dots = f^p \circ f$.

Le but du problème est d'étudier quelques exemples et de montrer que lorsque E est de dimension finie n, avec n au moins égal à 2, alors pour tout endomorphisme de E il existe un entier p compris entre 1 et n tel que

$$E = \mathrm{Im}(f^p) \oplus \ker(f^p) \tag{1}$$

Premier exemple

$E = \mathbb{R}^3$. Soit f l'endomorphisme de E défini par : $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, f(x, y, z) = (-x + y, y - z, y - z)$.

1. Déterminer le noyau et l'image de f. Peut-on choisir $p = 1$?
2. Pour $(x, y, z) \in E$, calculer $f^2(x, y, z)$. Déterminer le noyau et l'image de f^2. Peut-on choisir $p = 2$?
3. Déterminer f^3. Que remarque-t-on ? Que peut-on dire du noyau et de l'image de f^3 ?

Deuxième exemple

$E = \mathbb{R}_3[X]$. On note m un paramètre réel. Soit f_m l'application définie par $\forall P \in E\ f_m(P) = P' + mP$.

1. Montrer que f_m définit un endomorphisme de E.
2. Calculer, suivant la valeur de m, le rang de f_m.
3. Déterminer, suivant les valeurs de m, $\ker(f_m)$ et $\mathrm{Im}(f_m)$.
4. Suivant les valeurs de m, déterminer le plus petit entier p vérifiant (1)

Cas général

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n avec $n \geqslant 2$ et f un endomorphisme de E.

1. Si f est un automorphisme de E quels sont les entiers p vérifiant (1) ?
   On suppose maintenant que l'endomorphisme f n'est pas bijectif, et on note pour $k \in \mathbb{N}$: $K_k = \ker(f^k)$ et $I_k = \mathrm{Im}(f^k)$ et $d_k = \dim(K_k)$.
2. Vérifier que pour tout k, on a $K_k \subset K_{k+1}$ et $I_{k+1} \subset I_k$.
3. Que peut-on dire de la suite (d_k) ? En déduire qu'il existe un entier k strictement positif tel que $K_k = K_{k+1}$. On note p le plus petit entier strictement positif vérifiant cette égalité. Vérifier que $p \leqslant n$.
4. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}\ K_{p+k} = K_p$.
5. A l'aide du théorème du rang, montrer que $I_{p+1} = I_p$ et $\forall k \in \mathbb{N}\ I_{p+k} = I_p$.
6. Montrer que K_p et I_p sont supplémentaires dans E.

Troisième exemple

$E = \mathbb{R}^3$. Soit f l'endomorphisme de E définit par $\forall (x, y, z) \in E\ f(x, y, z) = (x - z, -x - 2y + 3z, -y + z)$.

1. Déterminer **un** vecteur ε_1 tel que $f(\varepsilon_1) = 0$, puis déterminer **un** vecteur ε_2 tel que $f(\varepsilon_2) = \varepsilon_1$, puis déterminer **un** vecteur ε_3 tel que $f(\varepsilon_3) = \varepsilon_2$.
2. Vérifier que la famille $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est une base de E.
3. Donner la matrice de f dans $\mathcal{B}$.
   Déterminer alors des bases de $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ que l'on exprimera à l'aide des vecteurs $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$. Peut-on choisir $p = 1$?
4. Etudier de la même façon f^2 et f^3 pour en déduire la valeur de l'entier p.

Quatrième exemple : partie optionnelle

$E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ Soit f l'application linéaire qui à une suite u associe la suite v définie par $\forall i \in \mathbb{N}\ v_i = u_{i+1}$.

1. Déterminer les ensembles K_1 et I_1. On montrera en particulier que f est surjective.
2. Déterminer K_2 et I_2 puis pour $k \in \mathbb{N}^*$, K_k et I_k.
3. Existe-t-il un entier p vérifiant (1) ? Que peut-on en déduire pour $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$?