Table des matières

I Bases en dimension quelconques **1**
- I.1 Familles libres . . . 1
- I.2 Familles génératrices . . . 1
- I.3 Bases . . . 1

II Espaces vectoriels **2**
- II.1 Sous-espaces et dimension . . . 2
- II.2 Supplémentaires . . . 2
- II.3 Sommes directes d'espaces vectoriels . . . 2

III Applications linéaires **3**
- III.1 Propriétés générales . . . 3
- III.2 Applications linéaires et dimension . . . 3
- III.3 Espaces stables . . . 3

IV Equation(s) d'un sous-espace **3**
- IV.1 Hyperplans . . . 3
- IV.2 Sous-espace en dimension finie . . . 4

V Endomorphismes particuliers **4**
- V.1 Homothéties . . . 4
- V.2 Projecteurs, symétries . . . 4
- V.3 Projection et espaces en somme directe . . . 4

I Bases en dimension quelconques

I.1 Familles libres

Proposition 1
Soit E un espace vectoriel de dimension n.
- une famille qui contient le vecteur nul est liée.
- une famille libre possède au plus n vecteurs.
- une famille libre possédant n vecteurs est une base de E.
- on ne modifie pas le caractère libre en effectuant une opération élémentaire sur les vecteurs d'une famille.
- une famille est libre ssi chacun de ses vecteurs n'est pas une combinaison linéaire des autres.

Définition 1
Soit E un espace vectoriel de dimension quelconque et X un ensemble (quelconque lui aussi). Soit $(u_i)_{i\in X}$ une famille de vecteurs de E. Cette famille est dite libre ssi pour tout $I \subset X$ ensemble **fini**, la famille $(u_i)_{i\in I}$ est libre.

D'une manière équivalente, aucun des u_i n'est une combinaison linéaire (finie, évidemment...) des autres u_j.

Proposition 2
Toute famille de polynômes tous non nuls et de degrés deux à deux distincts est libre.

I.2 Familles génératrices

Proposition 3
Soit E un espace de dimension n et $\mathcal{F} = (e_1, \dots, e_p) \in E^p$ une famille.
- si $\mathcal{F}$ est génératrice de E alors $p \geqslant n$.
- on peut avoir $p > n$ sans que $\mathcal{F}$ soit génératrice de E
- si $p = n$ et que $\mathcal{F}$ est génératrice, alors $\mathcal{F}$ est une base de E.
- si $e_p \in \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_{p-1})$ alors $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_{p-1}) = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_p)$
- on ne modifie pas l'espace engendré en faisant subir une opération élémentaire à la famille $\mathcal{F}$.

Définition-Proposition 1
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $A \subset E$. L'ensemble des sous-espaces de E qui contiennent A possède un minimum pour l'inclusion. Cet espace est noté $\mathrm{Vect}(A)$ et est appelé espace vectoriel engendré par A.

On peut le décrire comme l'ensemble des combinaisons linéaires (finies) d'éléments de A.

Définition 2
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, X un ensemble et $(e_i)_{i\in X}$ une famille d'éléments de E. On dit que $(e_i)_{i\in X}$ est génératrice de E ssi pour tout $u \in E$ on peut trouver un ensemble **fini** $I \subset X$ et $(\lambda_i)_{i\in I}$ une famille de scalaires tels que $u = \sum_{i\in I} \lambda_i e_i$.

Ainsi tout élément de E est une combinaison linéaire (la somme est finie) d'éléments de $(e_i)_{i\in X}$ et on a $E = \mathrm{Vect}((e_i)_{i\in X})$.

I.3 Bases

Définition 3
Soit X un ensemble et E un $\mathbb{K}$-ev. On dit que $\mathcal{B} = (e_i)_{i\in X}$ est une base de E ssi $(e_i)_{i\in X}$ est à la fois libre et génératrice de E.

Dans ce cas, pour tout $u \in E$ il existe un unique ensemble fini $I \subset X$ et une unique famille de scalaires $(x_i)_{i\in I}$ (appelée coordonnées de u dans $\mathcal{B}$) tels que $u = \sum_{i\in I} x_i e_i$.

Proposition 4
$\mathcal{B} = (X^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{K}[X]$ appelée base canonique.

II Espaces vectoriels

II.1 Sous-espaces et dimension

Définition 4
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

1. On dit que E est de dimension finie ssi E possède une famille génératrice finie $E = \mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_p)$ c'est à dire que chaque élément de $x \in E$ peut s'écrire sous la forme $x = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k u_k$ où les λ_k sont des scalaires.
2. Dans le cas où E est de dimension finie, E possède au moins une base et toutes les bases de E ont le même cardinal que l'on appelle la **dimension** de E et que l'on note $\dim_{\mathbb{K}}(E)$ ou plus simplement $\dim(E)$ s'il n'y a pas d'ambiguïté sur $\mathbb{K}$

Théorème 1
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et F un sous-espace de E.

1. F est de dimension fini et $\dim(F) \leqslant n$
2. $F = E$ ssi $\dim(F) = n$

II.2 Supplémentaires

Définition 5
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F, G deux sous-espaces. La somme de F et G est $F+G = \{x_F + x_G |\ x_F \in F \text{ et } x_G \in G\}$. C'est un espace vectoriel et on a même $F+G = \mathrm{Vect}(F \cup G)$.

Définition 6
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F, G deux sous-espaces. On dit que F et G sont supplémentaires dans E et on note $E = F \oplus G$ ssi

$$\forall x \in E\ \exists!\ (x_F, x_G) \in F \times G\ x = x_F + x_G$$

Avec ces notations, x_F est appelé le projeté de x sur F dans la direction G (ou parallèlement à G) et x_G le projeté de x sur G dans la direction F.

Théorème 2 (Théorème de la base adaptée)
Soit E un espace de dimension fini et F, G des sous-espaces de E.

$E = F \oplus G$ ssi la concaténation d'une base de F et d'une base de G est une base de E. On dit que la base obtenue (par concaténation) est **adaptée** à la somme $F \oplus G$.

On a alors évidemment

$$\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$$

Corollaire 1
En dimension finie, tout sous-espace possède au moins un supplémentaire.

Théorème 3 (Théorème de)
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, F, G deux sous-espaces de dimensions finies ; Alors $F+G$ est de dimension finie et

$$\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$$

Corollaire 2
Dans un espace de dimension finie, on a $E = F \oplus G \iff \begin{cases} F+G = E \\ \dim(F) + \dim(G) = \dim(E) \end{cases} \iff \begin{cases} F \cap G = \{0_E\} \\ \dim(F) + \dim(G) = \dim(E) \end{cases}$.

II.3 Sommes directes d'espaces vectoriels

Définition 7
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $F_1 \dots F_p$ des sous espaces de E.

1. La somme des espaces $(F_i)_{i\in[\![1,p]\!]}$ est $\sum_{i=1}^{p} F_i = \{u_1 + \dots + u_p |\ u_1 \in F_1$ et $u_2 \in F_2$ et $\dots$ et $u_p \in F_p\}$. C'est le sous espace de E engendré par les F_i
2. On dit que la somme $F = \sum_{i=1}^{p} F_i$ est **directe** et on note $F = \bigoplus_{i=1}^{p} F_i$ ssi tout vecteur $u \in F$ s'écrit de manière **unique** sous la forme $u = u_1 + \dots + u_p$ avec $\forall i \in [\![1,p]\!] u_i \in F_i$.

La somme et la somme directe sont associatives, ce qui permet de justifier a posteriori l'utilisation de $\sum$ et $\bigoplus$

Théorème 4
Soient $F_1, \dots, F_p$ des sous espaces de E. La somme $\sum_{i=1}^{p} F_i$ est directe ssi

$$\forall (u_1, \dots, u_n) \in \prod_{i=1}^{p} F_i\ u_1 + \dots + u_p = 0_E \iff u_1 = u_2 = \dots = u_p = 0_E.$$

Ainsi il suffit de vérifier que le vecteur nul possède une unique écriture sous forme de somme.

Définition-Proposition 2
Soient $F_1, \dots, F_p$ des sous espaces de E, de dimensions finies. Notons $F = \sum_{i=1}^{p} F_i$.

$F = \bigoplus_{i=1}^{p} F_i$ ssi la concaténation de bases des F_i est une base de F.
Une telle base de F est dite **adaptée** à la somme directe.

III Applications linéaires

III.1 Propriétés générales

Définition 8
Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f : E \to F$. On dit que f est linéaire ssi

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} \forall x, y \in E\ f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$$

On a alors $f(0_E) = 0_F$.
Si $F = \mathbb{K}$ on dit que f est une **forme linéaire**. L'ensemble des applications linéaires de E dans F est noté $\mathcal{L}(E, F)$.

Proposition 5
1. $\mathcal{L}(E, F)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (de dimension $\dim(E) \times \dim(F)$ quand E, F sont de dimensions finies).
2. Quand elle existe, la composée de deux applications linéaire est linéaire.
3. Quand elle existe, la bijection réciproque d'une application linéaire est linéaire.

Définition 9
Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Son noyau est $\ker(f) = f^{-1}(\{0\}) = \{x \in E |\ f(x) = 0_F\}$ et son image est $\mathrm{Im}(f) = f(E) = \{y \in F |\ \exists x \in E\ y = f(x)\}$.

Proposition 6
Soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$, G un sous-espace de E et H un sous-espace de F.
Alors $f(G)$ et $f^{-1}(H)$ sont des sous-espaces de F et E respectivement. En particulier $\ker(f)$ est un sous-espace de E et $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace de F.

III.2 Applications linéaires et dimension

Proposition 7
Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.
Soit H un supplémentaire de $\ker(f)$ dans E. $f_H : H \to \mathrm{Im}(f)$ est un isomorphisme.

Théorème 5
Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et supposons E de dimension finie. Alors $\dim(E) = \dim(\ker(f)) + \mathrm{rg}(f)$.

Corollaire 3
Soit E, F des espaces de **même** dimension et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

$$f \text{ est bijective } \iff f \text{ est injective} \iff f \text{ est surjective}$$

Dans le cas où f est un endomorphisme, les dimensions de E et F sont évidemment égales et ce résultat s'applique.

Corollaire 4
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ où E est de dimension finie.

$$f \in GL(E) \iff \exists g \in \mathcal{L}(E)\ f \circ g = Id_E \iff \exists g \in \mathcal{L}(E)\ g \circ f = Id_E$$

III.3 Espaces stables

Définition 10
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et F un sous-espace de E. On dit que F est stable par f ssi $f(F) \subset F$.

Théorème 6
Soit F un sous-espace de E, $\mathcal{B}_F$ une base de F que l'on complète en une base $\mathcal{B}$ de E. On note $n = \dim(E)$ et $p = \dim(F)$

F est stable par f ssi $\mathrm{Mat}_B(f)$ est de la forme $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ où

- $A \in M_p(\mathbb{K})$ (et on a alors $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}(f_{|F})$)
- $B \in M_{p,n-p}(\mathbb{K})$
- $C \in M_{n-p}(\mathbb{K})$
- 0 représente la matrice nulle de $\mathcal{M}_{n-p,p}$

IV Equation(s) d'un sous-espace

IV.1 Hyperplans

Définition 11
Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Un sous-espace H de E est appelé hyperplan ssi H admet une droite comme supplémentaire. Cette définition est valable même en dimension infinie.

Proposition 8
Les hyperplan de E de dimension $n > 0$ sont exactement les sous-espaces de dimension $n - 1$.

Proposition 9
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et H un hyperplan de E.
Alors H est le noyau d'une forme linéaire non nulle $f \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ et si $H = \ker(g)$ pour $g \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ alors f et g sont proportionnelles.

Théorème 7
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n > 0$ et $\mathcal{B} = (e_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ une base de E.

Pour un hyperplan H il existe $\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$ non nul tel qu'une équation de H dans la base $\mathcal{B}$ soit $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = 0$ ce qui signifie que $x \in E$ de coordonnées (dans $\mathcal{B}$) $\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$ appartient à H ssi $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = 0$.

Toutes les équations de H (dans la base $\mathcal{B}$) sont proportionnelles à celle-ci.

IV.2 Sous-espace en dimension finie

Théorème 8
Soit E de dimension $n > 0$ et $p \leqslant n$.

1. l'intersection de p hyperplans de E est de dimension au moins $n - p$.
2. réciproquement, tout sous-espace de dimension p est l'intersection de $n - p$ hyperplans (et possède donc un système d'équation à $n - p$ équations et n inconnues dans une base fixée de E).

V Endomorphismes particuliers

V.1 Homothéties

Définition 12
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. **L'homothétie** de rapport λ est l'application linéaire $\left\{\begin{array}{ccc} E & \to & E \\ x & \mapsto & \lambda x \end{array}\right.$.

V.2 Projecteurs, symétries

Définition 13
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soient également F, G deux sous-espaces de E, supplémentaires dans E. Tout $x \in E$ s'écrit donc de manière unique comme $x_F + x_G$ avec $x_F \in F$ et $x_G \in G$.

L'application $p : \left\{\begin{array}{ccc} E & \to & E \\ x & \mapsto & x_F \end{array}\right.$ est appelé projecteur sur F parallèlement à G (ou de direction G).

L'application $s : \left\{\begin{array}{ccc} E & \to & E \\ x & \mapsto & x_F - x_G \end{array}\right.$ est appelé symétrie par rapport à F parallèlement à G (ou de direction G).

Théorème 9
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soient également F, G deux sous-espaces de E, supplémentaires dans E

1. Soit p le projecteur sur F de direction G. On a alors :
   — $p \in \mathcal{L}(E)$
   — $p^2 = p$
   — $\ker p = G$
   — $\operatorname{Im} p = F = \ker(Id_E - p)$
2. Réciproquement si $f \in \mathcal{L}(E)$ vérifie $f^2 = f$ alors f est le projecteur sur $\operatorname{Im}(f) = \ker(f - Id)$ dans la direction $\ker(f)$ (et on a donc $\ker(f) \oplus \operatorname{Im}(f) = E$).

Théorème 10
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soient également F, G deux sous-espaces de E, supplémentaires dans E

1. Soit s la symétrie par rapport à F dans la direction G. Alors :
   — $s \in GL(E)$ et $s^2 = Id_E$ ie. $s = s^{-1}$
   — $F = \ker(s - Id_E) = \{x \in E |\ s(x) = x\}$
   — $G = \ker(s + Id) = \{x \in E |\ s(x) = -x\}$
2. Réciproquement, soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Si $f^2 = Id_E$ alors f est la symétrie par rapport à $\ker(f - Id_E)$ parallèlement à $\ker(f + Id_E)$ qui sont donc supplémentaires dans E.

V.3 Projection et espaces en somme directe

Définition 14
Soient $F_1, \dots F_p$ des sous-espaces de E vérifiant $E = \bigoplus_{i=1}^{p} F_i$. Pour $x \in E$, on pose $x = x_1 + \cdots + x_p$ l'unique décomposition en somme telle que $\forall i \in [\![1, p]\!] x_i \in F_i$.

Le projeté du vecteur x sur F_j parallèlement à $\bigoplus_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{p} F_i$ est le vecteur x_j. Le projecteur associé est $p_j : x \mapsto x_j$.

Proposition 10
Avec les notations de la définition précédente

1. $\forall (k, l) \in [\![1, p]\!]^2\ k \neq l \Rightarrow p_k \circ p_l = 0$
2. $\sum_{j=1}^{p} p_j = Id_E$.