Table des matières

Dans ce chapitre $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I Bases en dimension quelconques

I.1 Familles libres

I.1.1 Rappel

Si E est un $\mathbb{K}$-ev, une famille $(u_1, \dots, u_n)$ est dite libre ssi

$$\forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K} \ \sum_{k=1}^{n} \lambda_k u_k = 0_E \iff \forall i \in [\![1, n]\!] \ \lambda_i = 0_{\mathbb{K}}.$$

La seule manière d'obtenir le vecteur nul par combinaison linéaire des u_k est la combinaison triviale.

I.1.2 Proposition
Soit E un espace vectoriel de dimension n.

— une famille qui contient le vecteur nul est liée.

— une famille libre possède au plus n vecteurs.

— une famille libre possédant n vecteurs est une base de E.

— on ne modifie pas le caractère libre en effectuant une opération élémentaire sur les vecteurs d'une famille.

— une famille est libre ssi chacun de ses vecteurs n'est pas une combinaison linéaire des autres.

I.1.3 Familles infinies

On se place dans $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Les familles suivantes sont des familles infinies.

1. $(x \mapsto \sin(nx))_{n\in\mathbb{Z}}$.
2. $(x \mapsto e^{ax})_{a\in\mathbb{C}}$.

Il s'agit de se donner un ensemble d'élément repérés par un indice. Pour le deuxième exemple, on a associé une fonction à chaque nombre complexe.

I.1.4 Définition
Soit E un espace vectoriel de dimension quelconque et X un ensemble (quelconque lui aussi). Soit $(u_i)_{i\in X}$ une famille de vecteurs de E. Cette famille est dite libre ssi pour tout $I \subset X$ ensemble **fini**, la famille $(u_i)_{i\in I}$ est libre.

D'une manière équivalente, aucun des u_i n'est une combinaison linéaire (finie, évidemment...) des autres u_j.

I.1.5 Exemple
Dans $\mathbb{K}[X]$, la famille $(1, X, X^2, \dots) = (X^i)_{i\in\mathbb{N}}$ est libre. Preuve : unicité des coefficients d'un polynôme.

I.1.6 Exemple
Dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, la famille $(\cos(n.))_{n\in\mathbb{N}}$. est libre. Montrons par récurrence que $(\cos(n.))_{i\in[\![0,k]\!]}$ est libre, sachant que le cas $k = 0$ est trivial.

Supposons que $(\cos(n.))_{n\in[\![0,k]\!]}$ est libre et soient $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{k+1} \in \mathbb{R}$. Supposons que $\forall x \in \mathbb{R} \sum_{n=0}^{k+1} \lambda_n \cos(nx) = 0$ (1).

Soit $x \in \mathbb{R}$. On dérive deux fois la relation précédente : $\sum_{n=0}^{k+1} -n^2\lambda_n \cos(nx) = 0$ (2)

Si on calcule $(k+1)^2(1)+(2)$ on obtient $\sum_{n=0}^{k} \lambda_n((k+1)^2 - n^2)\cos(nx) = 0$ (les derniers termes s'annulent). Par hypothèse de récurrence, $\lambda_n((k+1)^2-n^2) = 0$ pour tout $n \in [\![0,k]\!]$ ie $\lambda_n = 0$.

Finalement, en reprenant (1), $\lambda_{n+1} = 0$ car $\cos((n+1).)$ n'est pas la fonction nulle.

I.1.7 Exemple
Soit $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une famille de polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ telle que $\forall k \in \mathbb{N}\ \deg(P_k) = k$. Alors cette famille est libre.

En effet, si $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i P_i = 0$ pour un entier n et des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ alors le coefficient dominant de la somme est $\lambda_n \times$ le coefficient dominant de P_n. Donc $\lambda_n = 0$.

Ceci constitue l'hérédité d'une récurrence qui est trivialement initialisée (un polynôme de degré nul est un polynôme constant non nul donc constitue une famille libre à 1 élément).

I.1.8 Proposition
Toute famille de polynômes tous non nuls et de degrés deux à deux distincts est libre.

I.2 Familles génératrices

I.2.1 Proposition
Soit E un espace de dimension n et $\mathcal{F} = (e_1, \dots, e_p) \in E^p$ une famille.

— si $\mathcal{F}$ est génératrice de E alors $p \geqslant n$.
— on peut avoir $p > n$ sans que $\mathcal{F}$ soit génératrice de E
— si $p = n$ et que $\mathcal{F}$ est génératrice, alors $\mathcal{F}$ est une base de E.
— si $e_p \in \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_{p-1})$ alors $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_{p-1}) = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_p)$
— on ne modifie pas l'espace engendré en faisant subir une opération élémentaire à la famille $\mathcal{F}$.

I.2.2 Exemple
Montrer que $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 |\ 2x + y - z + t = 0 \text{ et } x - 3y + t = 0\}$ est un espace vectoriel et en donner une famille génératrice.

I.2.3 Définition-Proposition
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $A \subset E$. L'ensemble des sous-espaces de E qui contiennent A possède un minimum pour l'inclusion. Cet espace est noté $\mathrm{Vect}(A)$ et est appelé espace vectoriel engendré par A.

On peut le décrire comme l'ensemble des combinaisons linéaires (finies) d'éléments de A.

Preuve.
Notons $\Omega = \{F \subset E |\ A \subset F \text{ et } F \text{ est un sev de E}\}$. Alors $\Omega \neq \emptyset$ car $E \in \Omega$.

Posons $G = \bigcup_{F\in\Omega} F$ l'intersection de tous les éléments de Ω. Clairement (par construction), $A \subset G$.

Alors $0_E \in G$ car 0_E est un élément de tout sous espace de E. Si $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et $x, y \in G$ alors x et y sont élément de tout $F \in \Omega$ et donc $\lambda x + \mu y$ est élément de tout $F \in \Omega$. Ainsi $\lambda x + \mu y \in G$ et G est bien un sous-espace de E.

SI maintenant on considère F un sous espace de E qui contient A alors $F \in \Omega$ et par construction $G \subset F$, ce qui prouve que G est bien le minimum de Ω pour l'inclusion.

Finalement, toute combinaison linéaire d'éléments de A est dans G par stabilité, et l'ensemble des combinaisons d'éléments de A est un sev de E (cf cours de sup).■

I.2.4 Définition
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, X un ensemble et $(e_i)_{i\in X}$ une famille d'éléments de E. On dit que $(e_i)_{i\in X}$ est génératrice de E ssi pour tout $u \in E$ on peut trouver un ensemble **fini** $I \subset X$ et $(\lambda_i)_{i\in I}$ une famille de scalaires tels que $u = \sum_{i\in I} \lambda_i e_i$.

Ainsi tout élément de E est une combinaison linéaire (la somme est finie) d'éléments de $(e_i)_{i\in X}$ et on a $E = \mathrm{Vect}((e_i)_{i\in X})$.

I.2.5 Exemple
$(X^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une famille génératrice de $\mathbb{K}[X]$.

I.2.6 Exemple
Soit $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une famille de polynômes vérifiant $\forall k \in \mathbb{N}\ \deg(P_k) = k$. Montrons que cette famille est génératrice de $\mathbb{K}[X]$.

En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(P_0, \dots, P_n)$ est libre dans $\mathbb{K}_n[X]$ donc engendre $\mathbb{K}_n[X]$ qui est de dimension $n+1$. Comme tout polynôme non nul possède un degré n, il est combinaison linéaire des $n+1$ premier P_k, ce qui prouve le caractère générateur.

Un exemple de telle base est la famille $((X-a)^k)_{k\in\mathbb{N}}$ pour un $a \in \mathbb{K}$ fixé. Les coordonnées d'un polynôme P sont alors les $\frac{P^{(k)}(a)}{k!}$ d'après le théorème de Taylor.

I.3 Bases

I.3.1 Définition

Soit X un ensemble et E un $\mathbb{K}$-ev. On dit que $\mathcal{B} = (e_i)_{i\in X}$ est une base de E ssi $(e_i)_{i\in X}$ est à la fois libre et génératrice de E.

Dans ce cas, pour tout $u \in E$ il existe un unique ensemble fini $I \subset X$ et une unique famille de scalaires $(x_i)_{i\in I}$ (appelée coordonnées de u dans $\mathcal{B}$) tels que $u = \sum_{i\in I} x_i e_i$.

I.3.2 Proposition

$\mathcal{B} = (X^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{K}[X]$ appelée base canonique.

I.3.3 Remarque

De manière plus générale, si on choisit $P_k \in \mathbb{K}[X]$ de degré k pour tout $k \in \mathbb{N}$ alors $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{K}[X]$.

II Espaces vectoriels

II.1 Sous-espaces et dimension

II.1.1 Définition

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

1. On dit que E est de dimension finie ssi E possède une famille génératrice finie $E = \mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_p)$ c'est à dire que chaque élément de $x \in E$ peut s'écrire sous la forme $x = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k u_k$ où les λ_k sont des scalaires.
2. Dans le cas où E est de dimension finie, E possède au moins une base et toutes les bases de E ont le même cardinal que l'on appelle la **dimension** de E et que l'on note $\dim_{\mathbb{K}}(E)$ ou plus simplement $\dim(E)$ s'il n'y a pas d'ambiguïté sur $\mathbb{K}$

II.1.2 Exemple

1. $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}) = 1$, une base est (1)
2. $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) = 2$ et la base canonique est $(1, i)$.
3. $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^n) = n$.
4. $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}_n[X]) = n + 1$
5. $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}^n) = 2n$
6. $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}_n[X]) = 2n + 2$

II.1.3 Théorème

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et F un sous-espace de E.

1. F est de dimension fini et $\dim(F) \leqslant n$
2. $F = E$ ssi $\dim(F) = n$

II.1.4 Exemple

On se sert très souvent de la deuxième partie de cette propriété pour prouver l'égalité de deux espaces.

Considérons par exemple le plan $P : x + y + z = 0$ dans $\mathbb{R}^3$. On vérifie aisément que $u = (1, -1, 0)$ et $v = (1, 0, -1)$ sont des éléments de P et donc $\mathrm{Vect}(u, v) \subset P$. De plus, $\mathrm{Vect}(u, v)$ est de dimension 2, tout comme P car (u, v) est libre. Donc $P = \mathrm{Vect}(u, v)$ (et on a en fait trouvé une base de P).

II.1.5 Une formule de dimension

$$\dim(F \times G) = \dim(F) + \dim(G)$$

II.2 Supplémentaires

II.2.1 Définition

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F, G deux sous-espaces. La somme de F et G est $F+G = \{x_F + x_G \mid x_F \in F \text{ et } x_G \in G\}$. C'est un espace vectoriel et on a même $F+G = \mathrm{Vect}(F \cup G)$.

II.2.2 Exemple

Dans $\mathbb{R}^2$, la somme de deux droites vectorielles non confondues est $\mathbb{R}^2$.

Dans $\mathbb{R}^3$ la somme d'un plan et d'une droite non contenue dans ce plan est $\mathbb{R}^3$.

II.2.3 Famille génératrice

Si on dispose d'une famille (u_i) génératrice de F et d'une famille (v_i) génératrice de G, alors la concaténation de ces familles engendre $F + G$.

Ainsi, en dimension finie, $\dim(F + G) \leqslant \dim(F) + \dim(G)$.

II.2.4 Exemple

Donner une base de $P_1 + P_2$ où $P_1 : x - y + 2z = 0$ et $P_2 = \mathrm{Vect}(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix})$.

II.2.5 Définition

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F, G deux sous-espaces. On dit que F et G sont supplémentaires dans E et on note $E = F \oplus G$ ssi

$$\forall x \in E\ \exists!\ (x_F, x_G) \in F \times G\ x = x_F + x_G$$

Avec ces notations, x_F est appelé le projeté de x sur F dans la direction G (ou parallèlement à G) et x_G le projeté de x sur G dans la direction F.

II.2.6 Caractérisation

On a également $E = F \oplus G \iff \begin{cases} E = F + G \\ F \cap G = \{0_E\} \end{cases}$.

II.2.7 Exemple

1. $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ et la décomposition associée est $A = \frac{1}{2}(A + {}^tA) + \frac{1}{2}(A - {}^tA)$. Ainsi la projection d'une matrice A sur l'ensemble des matrices symétrique, dans la direction de l'ensemble des matrices anti-symétriques est $\frac{A+{}^tA}{2}$.
2. Notons $F = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} |\ f \text{ est paire}\}$ et $G = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} |\ f \text{ est impaire}\}$. Alors $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = F \oplus G$, les projections d'une fonction f sur F et G étant respectivement $x \mapsto \frac{f(x)+f(-x)}{2}$ et $x \mapsto \frac{f(x)-f(-x)}{2}$.

II.2.8 Théorème (Théorème de la base adaptée)

Soit E un espace de dimension fini et F, G des sous-espaces de E.

$E = F \oplus G$ ssi la concaténation d'une base de F et d'une base de G est une base de E. On dit que la base obtenue (par concaténation) est **adaptée** à la somme $F \oplus G$.

On a alors évidemment

$$\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$$

Dans ce cadre, déterminer les projections se ramène au calcul de coordonnées dans une base adaptée.

II.2.9 Corollaire

En dimension finie, tout sous-espace possède au moins un supplémentaire.

II.2.10 Théorème (Théorème de)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, F, G deux sous-espaces de dimensions finies ; Alors $F+G$ est de dimension finie et

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$$

II.2.11 Corollaire

Dans un espace de dimension finie, on a $E = F \oplus G \iff \begin{cases} F + G = E \\ \dim(F) + \dim(G) = \dim(E) \end{cases} \iff \begin{cases} F \cap G = \{0_E\} \\ \dim(F) + \dim(G) = \dim(E) \end{cases}$.

II.2.12 Exercice

Caractériser (donner une ou des CNS sur) les espaces supplémentaires dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.

II.3 Sommes directes d'espaces vectoriels

II.3.1 Définition

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $F_1 \dots F_p$ des sous espaces de E.

1. La somme des espaces $(F_i)_{i \in [\![1,p]\!]}$ est $\sum_{i=1}^{p} F_i = \{u_1 + \cdots + u_p |\ u_1 \in F_1 \text{ et } u_2 \in F_2 \text{ et } \dots \text{ et } u_p \in F_p\}$. C'est le sous espace de E engendré par les F_i
2. On dit que la somme $F = \sum_{i=1}^{p} F_i$ est **directe** et on note $F = \bigoplus_{i=1}^{p} F_i$ ssi tout vecteur $u \in F$ s'écrit de manière **unique** sous la forme $u = u_1 + \cdots + u_p$ avec $\forall i \in [\![1,p]\!] u_i \in F_i$.

La somme et la somme directe sont associatives, ce qui permet de justifier a posteriori l'utilisation de $\sum$ et $\bigoplus$

II.3.2 Remarque

Le cas $p = 2$ est déjà connu. La somme $F + G$ est directe ssi F et G sont supplémentaires dans $F + G$.

II.3.3 Exercice

Trouver 3 espaces D_1, D_2, D_3 tels que $\mathbb{R}^3 = D_1 \oplus D_2 \oplus D_3$.

II.3.4 Théorème
Soient $F_1, \dots, F_p$ des sous espaces de E. La somme $\sum_{i=1}^{p} F_i$ est directe ssi

$$\forall (u_1, \dots, u_n) \in \prod_{i=1}^{p} F_i \; u_1 + \cdots + u_p = 0_E \iff u_1 = u_2 = \cdots = u_p = 0_E.$$

Ainsi il suffit de vérifier que le vecteur nul possède une unique écriture sous forme de somme.

Preuve.
Si on suppose la somme directe, alors le vecteur nul s'écrit de manière unique comme $0_E = \underbrace{0_E}_{\in F_1} + \cdots + \underbrace{0_E}_{\in F_p}$.

Réciproquement, supposons que $\forall (u_1, \dots, u_n) \in \prod_{i=1}^{p} F_i \; u_1 + \cdots + u_p = 0_E \iff u_1 = u_2 = \cdots = u_p = 0_E$. Soit $u \in \sum_{i=1}^{p} F_i$. Montrons que sa décomposition en somme est unique.

Si on a $u = \sum_{i=1}^{p} u_i = \sum_{i=1}^{p} u_i'$ avec $\forall i \in [\![1, p]\!] u_i, u_i' \in F_i$ alors $\sum_{i=1}^{p} \underbrace{(u_i - u_i')}_{\in F_i} = u - u = 0_E$ et donc $u_i - u_i' = 0_E$ pour tout $i \in [\![1, p]\!]$ par hypothèse. ∎

II.3.5 Exemple
Montrer que si $\mathcal{B} = (e_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ est une base de E alors $E = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathrm{Vect}(e_i)$.

II.3.6 Définition-Proposition
Soient $F_1, \dots, F_p$ des sous espaces de E, de dimensions finies. Notons $F = \sum_{i=1}^{p} F_i$.

$F = \bigoplus_{i=1}^{p} F_i$ ssi la concaténation de bases des F_i est une base de F.
Une telle base de F est dite **adaptée** à la somme directe.

II.3.7 Remarque

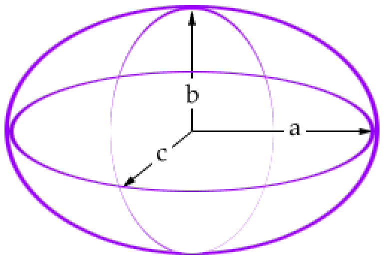
1. Observer le ssi, et surtout la réciproque. Il est facile de décomposer un espace en somme si on en connaît une base. Par exemple $\mathbb{R}_3[X] = \mathrm{Vect}(1) \oplus \mathrm{Vect}(X, X^2) \oplus \mathrm{Vect}(X^3)$.
2. On obtient immédiatement $\dim \left(\bigoplus_{i=1}^{p} F_i \right) = \sum_{i=1}^{p} \dim(F_i)$.

II.3.8 5/2

Quels genre de sous-espaces sont forcément en somme directe ?

II.3.9 Une application

Considérons la surface suivante, image d'une sphère par une application linéaire f simple : On a ici 3 droites (2 à 2 orthogonales d'ailleurs) D_a, D_b et D_c telles que sur



chaque droite l'application f est une homothétie de rapport a, b ou c.
Comme $D_a \oplus D_b \oplus D_c = \mathbb{R}^3$, dans une base de $\mathbb{R}^3$ adaptée à cette somme directe, la matrice de f est :

III Applications linéaires

III.1 Propriétés générales

III.1.1 Définition
Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f : E \to F$. On dit que f est linéaire ssi

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} \forall x, y \in E \; f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$$

On a alors $f(0_E) = 0_F$.
Si $F = \mathbb{K}$ on dit que f est une **forme linéaire**. L'ensemble des applications linéaires de E dans F est noté $\mathcal{L}(E, F)$.

III.1.2 Exemple
Quelques exemples important (avec des notations évidentes) : $f \mapsto f', f \mapsto \int_a^b f, (u_n)_n \mapsto (u_{n+1})_n, P \mapsto P(X+1), P \mapsto P(a)$ (avec un $a \in \mathbb{K}$ fixé).
D'autres plus géométriques : les projection (orthogonales ou non) et symétries, les rotations du plan et de l'espace.

III.1.3 Application canoniquement associée

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. L'application linéaire canoniquement associée à A est $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^p & \to & \mathbb{K}^n \\ X & \mapsto & AX \end{array} \right.$ et la matrice dans les bases canoniques de $\mathbb{K}^p$ et $\mathbb{K}^n$ de f est la matrice A.

III.1.4 Proposition

1. $\mathcal{L}(E,F)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (de dimension $\dim(E) \times \dim(F)$ quand E, F sont de dimensions finies).
2. Quand elle existe, la composée de deux applications linéaire est linéaire.
3. Quand elle existe, la bijection réciproque d'une application linéaire est linéaire.

III.1.5 Définition

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Son noyau est $\ker(f) = f^{-1}(\{0\}) = \{x \in E |\ f(x) = 0_F\}$ et son image est $\mathrm{Im}(f) = f(E) = \{y \in F |\ \exists x \in E\ y = f(x)\}$.

III.1.6 Exemple

Notons $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ et $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X])$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. Calculer $\ker(f)$.

III.1.7 Proposition

Soient $f \in \mathcal{L}(E,F)$, G un sous-espace de E et H un sous-espace de F.

Alors $f(G)$ et $f^{-1}(H)$ sont des sous-espaces de F et E respectivement. En particulier $\ker(f)$ est un sous-espace de E et $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace de F.

Preuve.

— Montrons que $f(G)$ est un sous espace de F.

Soient donc $x, y \in f(G)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Montrons que $\lambda x + \mu y \in f(G)$.

Or $x, y \in f(G)$ donc on peut poser $u, v \in G$ tels que $x = f(u)$ et $y = f(v)$. Alors, par linéarité, $\lambda x + \mu y = f(\lambda u + \mu G) \in f(G)$ car $\lambda u + \mu v \in G$ (c'est un espace vectoriel).

— Montrons que $f^{-1}(H)$ est un sous-espace de E. Soient $x, y \in f^{-1}(H)$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Alors $f(\lambda x + \mu y) = \lambda \underbrace{f(x)}_{\in H} + \mu \underbrace{f(y)}_{\in H} \in H$ car H est un sous-espace de F donc $\lambda x + \mu y \in f^{-1}(H)$ ■

III.1.8 Rappels

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$.

1. f est injective ssi $\ker(f) = \{0_E\}$.
2. f est surjective ssi $\mathrm{Im}(f) = F$ (valable même si f n'est pas linéaire).
3. Si $E = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_n)$ alors $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(f(e_1), \ldots, f(e_n))$.
4. Si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E, f est bijective (isomorphisme) ssi $(f(e_1), \ldots f(e_n))$ est une base de F.

III.2 Applications linéaires et dimension

III.2.1 Proposition

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$.

Soit H un supplémentaire de $\ker(f)$ dans E. $f_H : H \to \mathrm{Im}(f)$ est un isomorphisme.

Preuve.

On a $f_{|H} : \left\{ \begin{array}{ccc} H & \to & \mathrm{Im}\, f \\ x & \mapsto & f(x) \end{array} \right.$ et $H \oplus \ker(f) = E$. Il s'agit bien d'une application linéaire de $\mathcal{L}(H, \mathrm{Im}\, f)$.

— $\ker f_{|H} = \{x \in H |\ f(x) = 0\} = H \cap \ker f = \{0_E\}$ car H et $\ker f$ sont en somme directe.

— Soit $y \in \mathrm{Im}\, f$. Alors il existe $x \in E$ tel que $f(x) = y$. Or on peut écrire $x = x_H + x_K$ avec $x_H \in H$ et $x_K \in \ker f$. Ainsi $f(x) = f(x_H) + f(x_K) = f(x_H) + 0_E$ et donc $y = f(x_H) = f_{|H}(x_H)$. Donc $\mathrm{Im}\, f_{|H} = \mathrm{Im}\, f$.

Finalement $f_{|H}$ est bien un isomorphisme linéaire. ■

III.2.2 Théorème

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et supposons E de dimension finie. Alors $\dim(E) = \dim(\ker(f)) + \mathrm{rg}(f)$.

III.2.3 Exemple
Si E est de dimension n et $f \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ est une forme linéaire non nulle, alors $\dim(\ker(f)) = n-1$.

III.2.4 Corollaire
Soit E, F des espaces de **même** dimension et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

$$f \text{ est bijective } \iff f \text{ est injective} \iff f \text{ est surjective}$$

Dans le cas où f est un endomorphisme, les dimensions de E et F sont évidemment égales et ce résultat s'applique.

III.2.5 Exemple (Polynômes interpolateur de Lagrange)
Soient $a_0, \dots a_n \in \mathbb{K}$ des scalaires deux à deux distincts.

L'application $\varphi : \begin{cases} \mathbb{K}_n[X] & \to & \mathbb{K}^{n+1} \\ P & \mapsto & \begin{pmatrix} P(a_0) \\ \vdots \\ P(a_n) \end{pmatrix} \end{cases}$ est injective (compter les racines d'un polynôme du noyau, seul le polynôme nul en possède autant) et donc bijective.

En conséquence, si on fixe $y_0, \dots, y_n \in \mathbb{K}$ (quelconques cette fois), il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{K}_n[X]$ tel que $\forall i \in [\![0, n]\!]\ P(a_i) = y_i$, ou encore par $n+1$ points d'abscisses 2 à 2 distinctes il passe une unique courbe polynomiale de degré n ou moins.

Pour déterminer P, on calcule les P_i tels que $\varphi(P_i) = e_i$ le $i$ème vecteur de la base canonique de $\mathbb{K}^{n+1}$. Un raisonnement rapide sur les racines (2 à 2 distinctes) de P_i montre que $P_i = \alpha_i \prod_{\substack{j=0 \\ \neq i}}^{n} (X - a_j)$ et comme $P_i(a_i) = 1$ on trouve la valeur de α_i.

Ensuite, la linéarité de φ montre que $\varphi(\sum_{i=0}^{n} y_i P_i) = \sum_{i=0}^{n} y_i e_i$ et donc $P = \sum_{i=0}^{n} y_i P_i$.

III.2.6 Corollaire
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ où E est de dimension finie.

$$f \in GL(E) \iff \exists g \in \mathcal{L}(E)\ f \circ g = Id_E \iff \exists g \in \mathcal{L}(E)\ g \circ f = Id_E$$

III.2.7 Remarque

C'est le pendant du théorème qui énonce qu'une matrice est inversible ssi on trouve un inverse à gauche ou un inverse à droite.

III.3 Espaces stables

III.3.1 Définition
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et F un sous-espace de E. On dit que F est stable par f ssi $f(F) \subset F$.

III.3.2 Exemple
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Montrer que $F_\lambda = \ker(f - \lambda id_E)$ est stable par f.

III.3.3 Restriction

Si F est stable par f alors on peut définir $f_F : \begin{cases} F & \to & F \\ x & \mapsto & f(x) \end{cases}$ la restriction de f à F (le détail important ici est l'espace d'arrivé qui est illégal si F n'est pas stable).

Alors $f_F \in \mathcal{L}(F)$.

III.3.4 Familles génératrices

Soit $F = \text{Vect}(e_1, \dots, e_p)$. F est stable par f ssi $\forall j \in [\![1, p]\!] f(e_j) \in F$. En effet $f(F) = \text{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_p))$.

III.3.5 Exemple
Considérons l'application $f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -x+y+z \\ x-y+z \\ x+y-z \end{pmatrix}$. On pose $u = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $F = \text{Vect}(u, v)$ et $G = \text{Vect}(w)$.

Montrer que $\mathcal{B} = (u, v, w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$, que F, G sont stables par f, calculer $\text{Mat}_{(u,v)}(f_F), \text{Mat}_{(v)}(f_G)$ et $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.

III.3.6 Théorème
Soit F un sous-espace de E, $\mathcal{B}_F$ une base de F que l'on complète en une base $\mathcal{B}$ de E. On note $n = \dim(E)$ et $p = \dim(F)$

F est stable par f ssi $\text{Mat}_B(f)$ est de la forme $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ où

- $A \in M_p(\mathbb{K})$ (et on a alors $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}_F}(f_{|F})$)
- $B \in M_{p,n-p}(\mathbb{K})$
- $C \in M_{n-p}(\mathbb{K})$
- 0 représente la matrice nulle de $\mathcal{M}_{n-p,p}$

Preuve.
On note $M = (m_{i,j}) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Supposons F stable par f et notons, $\mathcal{B} = e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$ (les p premiers sont dans F). Pour $j \in [\![1, p]\!]$, on a $f(e_j) = \sum_{i=1}^{n} m_{ij} e_i$. Les derniers termes de cette somme sont nuls car $e_j \in F$, ainsi $f(e_j) = \sum_{i=1}^{p} m_{ij} e_i$. Ceci prouve que les n - p dernières lignes de M sont nulles dans les p premières colonnes.

Réciproquement, si M est de la forme annoncée, alors $f(e_j)$ n'a des coordonnées que sur $e_1, \dots, e_p$ ie est dans F, et ce pour tout $j \in [\![1, p]\!]$. ■

IV Equation(s) d'un sous-espace

IV.1 Hyperplans

IV.1.1 Définition

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Un sous-espace H de E est appelé hyperplan ssi H admet une droite comme supplémentaire. Cette définition est valable même en dimension infinie.

IV.1.2 Proposition

Les hyperplan de E de dimension $n > 0$ sont exactement les sous-espaces de dimension $n-1$.

IV.1.3 Exemple

Les droites du plan, les plans dans l'espace. Remarquer les équations cartésiennes similaires dans ces cas.

IV.1.4 Proposition

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et H un hyperplan de E.

Alors H est le noyau d'une forme linéaire non nulle $f \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ et si $H = \ker(g)$ pour $g \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ alors f et g sont proportionnelles.

Preuve.
Soit $\mathbb{K}u$ une droite supplémentaire de H dans E (ie. $u \notin H$). Pour $x \in E$ on peut alors écrire $x = x_H + \lambda_x u$ de manière unique. On pose $f : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & \lambda_x \end{array} \right.$. On prouve très facilement (voir les projecteurs) que f est une forme linéaire, non nulle car $f(u) = 1$.

De plus, pour $x \in E$, $f(x) = 0 \iff \lambda_x = 0 \iff x \in H$. Ainsi $H = \ker(f)$.

Supposons maintenant que $g \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ vérifie $\ker(g) = H$. Alors g est une forme linéaire non nulle (sinon son noyau est E) et on a avec les notations précédentes, $g(x) = g(x_H) + \lambda_x g(u) = \lambda_x g(u) = g(u) f(x)$. Ainsi $g = \underbrace{g(u)}_{\in \mathbb{K}} \times f$.

Exo : on peut en fait décrire g de la même manière que f $(g : x \mapsto \mu_x)$. Avec quel(s) vecteur(s) ? ■

IV.1.5 Théorème

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n > 0$ et $\mathcal{B} = (e_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ une base de E.

Pour un hyperplan H il existe $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$ non nul tel qu'une équation de H dans la base $\mathcal{B}$ soit $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = 0$ ce qui signifie que $x \in E$ de coordonnées (dans $\mathcal{B}$) $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ appartient à H ssi $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = 0$.

Toutes les équations de H (dans la base $\mathcal{B}$) sont proportionnelles à celle-ci.

Preuve.
Posons $f \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ telle que $H = \ker(f)$. Alors $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in H \iff f(x) = 0 \iff f(e_1)x_1 + f(e_2)x_2 + \cdots + f(e_n)x_n = 0$. En notant $a_i = f(e_i)$ il ne reste qu'à vérifier que ces scalaires sont non tous nuls. S'ils l'étaient, f serait l'application nulle car son image est engendrée par $(f(e_1), \dots, f(e_n))$.

on a bien trouvé une équation (à coefficients non tous nuls) de H dans la base $\mathcal{B}$. Toutes les autres équations de H sont de la forme $g(x) = 0$ où g est une forme linéaire, donc sont proportionnelles (l'application $x \mapsto \sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i$ est linéaire pour toute famille $(\beta_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ par composition). ■

IV.1.6 Exemple

Dans $E = \mathbb{K}_n[X]$, l'ensemble $F = \{P \in E | \ P(1) = 0\}$ est un hyperplan. En effet, un polynôme $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ est dans F ssi $a_0 + \cdots + a_n = 0$ (équation dont les inconnues sont les coordonnées dans la base canonique et les coefficients tous égaux à 1).

IV.2 Sous-espace en dimension finie

IV.2.1 Intersection d'hyperplans

Soient $H_1, \dots H_p$ des hyperplans de E de dimension $n \geqslant p$ et $\mathcal{B}$ une base de E. L'intersection $H_1 \cap H_2 \cap \dots \cap H_p$ est l'ensemble des solutions d'un système S à n inconnues (les coordonnées dans $\mathcal{B}$) et p équations. Le rang de S est au maximum p donc l'ensemble des solutions (notre intersection) est de dimension au moins $n-p$.

Quel est le cas d'égalité pour les dimensions ?

IV.2.2 Théorème
Soit E de dimension $n > 0$ et $p \leqslant n$.

1. l'intersection de p hyperplans de E est de dimension au moins $n-p$.
2. réciproquement, tout sous-espace de dimension p est l'intersection de $n-p$ hyperplans (et possède donc un système d'équation à $n-p$ équations et n inconnues dans une base fixée de E).

Preuve.
Il nous reste à prouver le deuxième point.

Soit F un sous-espace de E de dimension p. Notons $(e_1, \dots, e_p)$ une base de F et complétons cette base en $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$. Soit $x \in E$ et $\begin{pmatrix} x_1 \\ \\ x_n \end{pmatrix}$ ses coordonnées dans $\mathcal{B}$. Alors $x \in F \iff x_{p+1} = 0$ et $\dots$ et $x_n = 0$.

Si on note $H_i : x_i = 0$ pour $i \in [\![p+1, n]\!]$ des hyperplans décrits par leurs équations dans $\mathcal{B}$, alors $F = \bigcap_{i=p+1}^{n} H_i$. On obtient bien $n-p$ hyperplans ie. $n-p$ équations. ∎

IV.2.3 Exemple
On savait qu'une droite dans l'espace est décrite par un système de deux équations, c'est à dire comme l'intersection de deux plans.

IV.2.4 Exercice
Trouver un système d'équation de la droite $D = \operatorname{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

V Endomorphismes particuliers

V.1 Homothéties

V.1.1 Définition
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. **L'homothétie** de rapport λ est l'application linéaire $\begin{cases} E & \to & E \\ x & \mapsto & \lambda x \end{cases}$.

V.1.2 Exemple
Deux homothéties très importantes : l'application nulle et l'identité.

V.1.3 Matrice d'une homothétie

On considère E de dimension finie égale à n cette fois et on note h_λ l'homothétie de rapport λ. Alors dans toute base $\mathcal{B}$ de E, $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(h_\lambda) = \lambda I_n$.

Matriciellement, la seule matrice semblable à λI_n est elle même, car pour $P \in GL_n(\mathbb{K})$, on a $P^{-1}\lambda I_n P = P^{-1}P\lambda I_n = \lambda I_n$.

V.1.4 Commutation

Une homothétie commute avec tout endomorphisme.

V.2 Projecteurs, symétries

V.2.1 Définition
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soient également F, G deux sous-espaces de E, supplémentaires dans E. Tout $x \in E$ s'écrit donc de manière unique comme $x_F + x_G$ avec $x_F \in F$ et $x_G \in G$.

L'application $p : \begin{cases} E & \to & E \\ x & \mapsto & x_F \end{cases}$ est appelé projecteur sur F parallèlement à G (ou de direction G).

L'application $s : \begin{cases} E & \to & E \\ x & \mapsto & x_F - x_G \end{cases}$ est appelé symétrie par rapport à F parallèlement à G (ou de direction G).

V.2.2 Liens entre ces applications

1. On a les liens important entre ces applications : $s = 2p - Id$ et $p = \frac{s+Id}{2}$.
2. Si p' et s' désignent les projection et symétrie sur G et de direction F, on a $p + p' = Id, p \circ p' = 0 = p' \circ p, s + s' = 0, s \circ s' = s' \circ s = -Id.$.

V.2.3 Théorème
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soient également F, G deux sous-espaces de E, supplémentaires dans E

1. Soit p le projecteur sur F de direction G. On a alors :
   — $p \in \mathcal{L}(E)$
   — $p^2 = p$
   — $\ker p = G$
   — $\operatorname{Im} p = F = \ker(Id_E - p)$
2. Réciproquement si $f \in \mathcal{L}(E)$ vérifie $f^2 = f$ alors f est le projecteur sur $\operatorname{Im}(f) = \ker(f - Id)$ dans la direction $\ker(f)$ (et on a donc $\ker(f) \oplus \operatorname{Im}(f) = E$).

Preuve.

1. Prouvons tout d'abord la linéarité.
   Soient $x, y \in E$ que l'on décompose en $x = x_F + x_G$ et $y = y_F + y_G$. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.
   Alors $p(\alpha x + \beta y) = p\big((\alpha x_F + \beta y_F) + (\alpha x_G + \beta y_G)\big) = \alpha x_F + \beta y_F = \alpha p(x) + \beta p(y)$ et p est bien linéaire.
   Evidemment, $p^2(x) = p(x_F + 0_E) = x_F = p(x)$ et on a bien $p^2 = p$.
   Ensuite, avec les mêmes notations, $p(x) = 0_E$ ssi $x_F = 0_E$ ssi $x \in G$. De plus, $p(x) = x_F \in F$ et on a en fait prouvé $\operatorname{Im}(f) \subset F$.
   Si $x \in F$, alors $p(x) = x \in \operatorname{Im}(f)$ et donc $F \subset \operatorname{Im}(p)$ et finalement $F = \operatorname{Im}(p)$.
   Il reste à prouver que $\operatorname{Im}(p) = \ker(p - Id_E)$. ON a déjà montré que tout $x \in F$ vérifie $p(x) - x = 0$ ie $(p - Id_E)(x) = 0$ et donc $F \subset \ker(p - Id_E)$. Soit maintenant $x \in \ker(p - Id_E)$ ie x vérifie $p(x) = x$. Ainsi $x \in \operatorname{Im}(p)$ et l'autre inclusion est prouvée.
2. — On a d'abord $(f - Id) \circ f = 0$ donc $\operatorname{Im}(f) \subset \ker(f - Id)$. L'autre inclusion est évidente (cf fin du point précédent).
   — Montrons maintenant que $\ker(f) \oplus \ker(f - Id) = E$. Soit $x \in E$.
      — Analyse : **Supposons** que $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in \ker(f)$ et $x_2 \in \ker(f - Id)$.
        Alors $f(x) = 0_E + f(x_2) = x_2$. Ainsi $x_2 = f(x)$ et donc $x_1 = x - x_2 = x - f(x)$.
      — Synthèse : Réciproquement, posons $x_1 = x - f(x)$ et $x_2 = f(x)$. Montrons que $x = x_1 + x_2$ (trivial) et que $x_1 \in \ker(f)$ et $x_2 \in \ker(f - Id)$ (moins trivial).
        Cependant, $f(x_1) = f(x) - f^2(x) = 0_E$ et $(f - Id)(x_2) = f(x_2) - x_2 = f^2(x) - f(x) = 0_E$ car $f^2 = f$.
      Conclusion : $E = \ker(f) + \ker(f - Id)$. Le fait que la somme est directe provient directement de l'analyse (les seules valeurs possibles sont...) ou du fait que si $x \in \ker(f) \cap \ker(f - Id)$ alors $f(x) = 0_E$ et $f(x) - x = 0_E$ donc $x = 0_E$ et on a bien $\ker(f) \cap \ker(f - Id) = \{0_E\}$.
   — Par définition d'un projecteur, et d'après notre analyse, f est le projecteur sur $\ker(f - Id) = \operatorname{Im}(f)$ dans la direction $\ker(f)$. ∎

V.2.4 Exemple
Soit la matrice $A = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ Montrer que l'endomorphisme canoniquement associé à A est un projecteur dont on précisera les éléments caractéristiques.

Question 5/2 : au vu de la matrice A, que dire de plus de la projection ?

V.2.5 Matrice dans une base adaptée

1. On considère p le projecteur de $\mathbb{R}^3$ sur un plan P parallèlement à une droite D non inclue dans P. On note $\mathcal{B} = (u, v, w)$ une base adaptée à $\mathbb{R}^3 = P \oplus D$. Donner la matrice de p dans $\mathcal{B}$.
2. Même question dans le cas général $E = F \oplus G$.

V.2.6 Exemple
On considère l'application $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ A & \mapsto & \frac{A + {}^tA}{2} \end{array} \right.$. il s'agit, d'après le point II.2.7 de la projection sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ parallèlement à $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$.

V.2.7 Théorème
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soient également F, G deux sous-espaces de E, supplémentaires dans E

1. Soit s la symétrie par rapport à F dans la direction G. Alors :
   — $s \in GL(E)$ et $s^2 = Id_E$ ie. $s = s^{-1}$
   — $F = \ker(s - Id_E) = \{x \in E |\ s(x) = x\}$
   — $G = \ker(s + Id) = \{x \in E |\ s(x) = -x\}$
2. Réciproquement, soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Si $f^2 = Id_E$ alors f est la symétrie par rapport à $\ker(f - Id_E)$ parallèlement à $\ker(f + Id_E)$ qui sont donc supplémentaires dans E.

V.2.8 Exemple
Dans $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ l'application s qui à une fonction f associe $s(f) : x \mapsto f(-x)$ est une symétrie. C'est la symétrie par rapport aux fonctions paire parallèlement aux fonctions impaires.

V.2.9 Matrice dans une base adaptée

Donner, avec les notations du théorème, la matrice de s dans une base adaptée à $E = F \oplus G$.

V.2.10 Exemple
Remarquons que la transposition est une symétrie. C'est même la symétrie associée au projecteur de l'exemple V.2.6

V.3 Projection et espaces en somme directe

V.3.1 Définition
Soient $F_1, \dots F_p$ des sous-espaces de E vérifiant $E = \bigoplus_{i=1}^{p} F_i$. Pour $x \in E$, on pose $x = x_1 + \cdots + x_p$ l'unique décomposition en somme telle que $\forall i \in [\![1, p]\!] x_i \in F_i$.

Le projeté du vecteur x sur F_j parallèlement à $\bigoplus_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{p} F_i$ est le vecteur x_j. Le projecteur associé est $p_j : x \mapsto x_j$.

V.3.2 Remarque

Si la somme directe des F_i n'est pas égale à l'espace E global, on peut se ramener à la définition en considérant plutôt $F = \sum_{i=1}^{p} F_i$ comme espace dans lequel on projette.

V.3.3 Proposition
Avec les notations de la définition précédente

1. $\forall (k, l) \in [\![1, p]\!]^2 \; k \neq l \Rightarrow p_k \circ p_l = 0$
2. $\sum_{j=1}^{p} p_j = Id_E$.

V.3.4 En pratique

Pour déterminer ces projections, on procède comme dans le cas d'espaces supplémentaires :

1. calcul de coordonnées dans une base adaptée si possible, et on regroupe par espace.
2. analyse/synthèse s'il le faut.