Devoir maison 5

A rendre le 01/12/2016 au plus tard.

Exercice 1
Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle $y' + \frac{1}{t}y = \frac{1}{t^3-4t^2+8t}$.

Exercice 2
Soient b et c deux réels. On s'intéresse aux solutions réelles de l'équation différentielle homogène

$$y'' + by' + cy = 0 \ (\mathcal{E}_H)$$

On suppose que $b^2 - 4c > 0$.

1. Donner les racines r_1 et r_2 du trinome $r^2 + br + c$, et rappeler les relations coefficients-racines (qui premettent d'exprimer en fonction de b et c : $r_1 + r_2$ et r_1r_2).
2. Montrer que toute fonction de la forme $t \mapsto e^{r_it}, i \in \{1, 2\}$, est solution de $(\mathcal{E}_H)$ sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que pour toute solution y de $(\mathcal{E}_H)$ sur $\mathbb{R}$:

$$(y' - r_1y)' - r_2(y' - r_1y) = 0$$

4. Montrer que pour toute solution y de $(\mathcal{E}_H)$ sur $\mathbb{R}$ il existe deux constantes réelles C_1 et C_2 telles que :

$$\forall t \in \mathbb{R} \ y'(t) - r_1y(t) = C_2e^{r_2t} \text{ et } y'(t) - r_2y(t) = C_1e^{r_1t}$$

5. En déduire que toute solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation $(\mathcal{E}_H)$ est de la forme :

$$t \mapsto \lambda_1e^{r_1t} + \mu e^{r_2t}$$

   où $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.
6. Etude d'un cas particulier : $b = 0$ et $c = -16$.
   (a) Donner l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle homogène $(\mathcal{E}_H)$ dans ce cas particulier.
   (b) On adjoint à l'équation différentielle $(\mathcal{E}_H)$ les conditions initiales :

$$y(0) = 2e, \ y'(0) = 0$$

   Combien de solutions sur $\mathbb{R}$ admet alors ce problème de Cauchy ? Expliciter ensuite ces solutions.

Remarque : nous avons prouvé la réciproque du résultat de la question 5 en cours : toute combinaison des $t \mapsto e^{r_it}$ est une solution de $(\mathcal{E}_H)$ sur $\mathbb{R}$.