Révisions

Exercice 1
Dans $\mathbb{R}^3$, on pose $u = (-1, 1, 0), v = (2, 0, 1), w = (1, 1, 1)$. Donner une base, la dimension et un supplémentaire de $F = \text{Vect}(u, v, w)$.

Exercice 2

Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \mapsto & P - (1-X)P' \end{cases}$. Montrer que f est linéaire et donner des bases de $\ker(f)$ et $\text{Im}(f)$.

Exercice 3
Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$. On suppose $f \circ g = g \circ f$. Montrer que $\ker(f)$ et $\text{Im}(f)$ sont stables par g.

Manipulations d'espaces

Exercice 4
Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, et F et G deux sous-espaces vectoriels de E . Montrer : $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$.

Exercice 5
Vrai ou Faux ?

Soit E un $\mathbb{R}$-e.v. (non nécessairement de dimension finie), et f et g deux endomorphismes de E.

1. $f \circ f = 0 \Leftrightarrow f = 0$.
2. $\text{Im}\,(g \circ f) \subset \text{Im}g$.
3. $\text{Im}g \subset \text{Im}\,(g \circ f)$.
4. $\ker\,(g \circ f) \subset \ker f$.
5. $\ker f \subset \ker\,(g \circ f)$.
6. $\text{Im}\, f \subset \ker f \Leftrightarrow f^2 = 0$.
7. $\text{Im}\, f \cap \ker f = f(\ker f^2)$.
8. Si f est injective, alors f est bijective.
9. $f(\ker(g \circ f)) = \ker g \cap \text{Im}\, f$.

Familles libres et génératrices

Exercice 6
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme non nul de E (espace de dimension n). On suppose qu'il existe une entier naturel p tel que $f^p = 0$ et on prend p le plus petit possible ie. $f^{p-1} \neq 0$.

1. Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que $(x, f(x), f^2(x), \ldots, f^{p-1}(x))$ est libre.
2. Montrer que $f^n = 0$.

Exercice 7
Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n : x \mapsto \cos(nx)$ et $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Montrer que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille libre.

Indication : on pourra procéder par récurrence et utiliser la dérivation.

Exercice 8
Soient E, F deux espaces vectoriels et $f : E \to F$ linéaire

On suppose qu'il existe une famille génératrice de E.

1. Montrer que f est injective si et seulement si f transforme toute famille libre de E en une famille libre de F
2. Montrer que f est surjective si et seulement s'il existe une famille génératrice de E transformée par f en une famille génératrice de F

Exercice 9
Soit E un espace vectoriel de dimension finie et soit $u \in \mathcal{L}\,(E)$ telle que

pour tout $x \in E$, $(x, u\,(x))$ est une famille liée.

Soit $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ une base de E.

1. Montrer qu'il existe $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{K}^n$ tels que $u(e_i) = \lambda_i e_i$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.
2. En considérant $e_i + e_j$, montrer que $\lambda_i = \lambda_j$ pour $i \neq j$.
3. Donner l'ensemble des endomorphismes u vérifiant la propriété de l'énoncé.
4. Quels sont les matrices $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent avec toutes les autres matrices ? On introduira f, l'endomorphisme canoniquement associé à M et on utilisera l'hypothèse de commutation sur des projecteurs bien choisis.

Sommes directes

Exercice 10
Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension finie $n \geq 1$, et F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels de E de même dimension.

Montrer qu'il existe un sous-espace vectoriel G de E tel que : $E = F_1 \oplus G = F_2 \oplus G$

Exercice 11
Soit E un espace vectoriel de dimension finie. et $f \in \mathcal{L}(E)$. On note $F_1 = \ker(f)$, $F_2 = \ker(f - Id_E)$, $F_3 = \ker(f - 2Id_E)$.

1. Montrer que l'on a la somme directe $F_1 \oplus F_2 \oplus F_3$
2. On suppose maintenant que $f^3 - 3f^2 + 2f = 0$. Montrer que $E = F_1 \oplus F_2 \oplus F_3$.
3. En notant r_i la dimension de F_i, donner la matrice de f dans une base adaptée à la somme précédente.

Projections, symétries

Exercice 12
On se place dans $\mathbb{R}^2$. On pose $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ la base canonique et $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $D_u = \text{Vect}(u)$ et $D_v = \text{Vect}(v)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^2$.
2. On note p le projecteur sur D_u parallèlement à D_v et s la symétrie associée. Pour $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, calculer $p\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et en déduire la matrice de p dans $\mathcal{B}$. Même question pour s
3. Calculer les matrices de p et s dans $\mathcal{B}' = (u, v)$

Exercice 13
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 3, $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = A$.

1. Calculer A^2. Qu'en déduire pour f ?
2. Donner une base de $\ker(f)$ et une base de $\text{Im}(f)$ puis la matrice de f dans une base adaptée à $\text{Im}(f) \oplus \ker(f) = E$.

Exercice 14
Soient E, F 2 $\mathbb{K}$-ev. Soient de plus $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, E)$ telles que $u \circ v = Id_F$. Montrer que $v \circ u$ est un projecteur et préciser ses éléments caractéristiques (projecteur sur quel espace, parallèlement à quel autre ?).

Exercice 15
1. On considère $T : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ A & \mapsto & {}^tA \end{array} \right.$. Montrer que T est une symétrie et en déduire que les ensembles des matrices symétriques et anti-symétriques sont des espaces vectoriels supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
2. On pose $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ f & \mapsto & f_o : x \mapsto f(-x) \end{array} \right.$ est une symétrie. Qu'en déduire ?