

## Intégrales sur un segment : révisions

### Exercice 1 (Les incontournables)

Calculer directement une primitive de :

- |                                       |   |   |
|---------------------------------------|---|---|
| 1. $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | 4. $x \mapsto e^{i\pi x + \sqrt{729}x}$ | 7. $x \mapsto \cos(e^2x - 728435)$                |
| 2. $x \mapsto \sqrt[42]{x}$           | 5. $x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$         | 8. $x \mapsto \frac{1}{x\sqrt{x}\sqrt{\sqrt{x}}}$ |
| 3. $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$        | 6. $x \mapsto \frac{1}{(2x+7)^2+1}$     | 9. $w \mapsto -3w + \text{ch}(4w)$                |

### Exercice 2

Donner des primitives, en précisant l'intervalle, de :

- |                                      |  |  |
|--------------------------------------|--|--|
| 1. $x \mapsto xe^{-2x^2}$            | 4. $x \mapsto \exp(e^x + x)$                     | 7. $x \mapsto \tan^2(x)$                   |
| 2. $x \mapsto \frac{x^2}{1+x^3}$     | 5. $x \mapsto \frac{1}{\cos^2(x)\sqrt{\tan(x)}}$ | 8. $x \mapsto \frac{1}{x\sqrt{2+\ln(3x)}}$ |
| 3. $x \mapsto \frac{\ln(\ln(x))}{x}$ | 6. $x \mapsto \frac{1}{x \ln^2(x)}$              | 9. $x \mapsto \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}$      |

### Exercice 3

Calculer

- $\int \sin(x)e^{2x} dx$
- $\int \sin(t) \text{sh}(t) dt$

### Exercice 4

Sans utiliser les propriétés de  $\ln$ , montrer que pour  $a, b > 0$  on a  $\int_1^{ab} \frac{1}{t} dt = \int_1^a \frac{1}{t} dt + \int_1^b \frac{1}{t} dt$ .

### Exercice 5

Calculer, en changeant de variable

- |   |  |
|---|--|
| 1. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\sin(t)} dt$ avec $u = \cos(t)$ | 3. $\int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{\ln(u)}{1+u^2} du$ avec $t = \frac{1}{u}$ . |
| 2. $\int \frac{1}{\text{ch}(x)} dx$ avec $t = e^x$ .                              | 4. $\int_{-1}^1 t^2 \sqrt{1-t^2} dt$ avec $t = \sin(\theta)$ .             |

## Convergence

### Exercice 6

Etudier la convergence des intégrales :

- |  |   |
|--|---|
| 1. $t \mapsto \frac{\ln(t)}{t}$ sur $]0, 1]$           | 6. $t \mapsto \frac{e^{\sin(t)}}{t}$ sur $[1, +\infty[$ .               |
| 2. $t \mapsto \frac{\ln(t)}{t^2}$ sur $[1, +\infty[$ . | 7. $t \mapsto \frac{\sqrt{\ln(t)}}{(t-1)\sqrt{t}}$ sur $]1, +\infty[$ . |
| 3. $t \mapsto \sqrt{1+t^2} - t$ sur $[0, +\infty[$ .   | 8. $t \mapsto e - \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t$ sur $[1, +\infty[$ .  |
| 4. $t \mapsto e^{-\ln(t)^2}$ sur $[1, +\infty[$ .      |   |
| 5. $t \mapsto e^{-t \arctan(t)}$ sur $[0, +\infty[$ .  |   |

### Exercice 7

Etudier la convergence et calculer le cas échéant :

- |   |   |
|---|---|
| 1. $\int_0^1 \frac{dt}{1-t^2}$ .        | 3. $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(t+1)(t+2)} dt$ |
| 2. $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$ . | 4. $\int_0^{+\infty} \frac{1}{e^t-1} dt$ .    |

## Plus technique

### Exercice 8

Calculer, **après** avoir prouvé leurs convergences :

- |  |   |
|--|---|
| 1. $\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{t}} dt$   | 3. $\int_0^1 \frac{\ln(1-x^2)}{x^2} dx$ |
| 2. $\int_0^1 \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}} dt$ | 4. $\int_0^1 \frac{\ln(t)}{(1+t)^2} dt$ |

### Exercice 9

Soit  $f \in \mathcal{C}([0, +\infty[, \mathbb{R})$  une fonction intégrable. Montrer que  $\int_x^{x+1} f(t) dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ .

### Exercice 10

- Montrer que  $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$  converge mais pas  $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$ .

On pose maintenant  $f : \begin{cases} ]0, +\infty[ & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt \end{cases}$ .

- Donner un équivalent de  $f$  en 0. Indication : au choix une intégration par parties ou une série entière (après avoir ramené l'étude à un intervalle de longueur fini).
- Après avoir montré que  $\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2} dt = o_{+\infty} \left( \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt \right)$ , donner un équivalent de  $f$  en  $+\infty$  en effectuant une intégration par parties.

## Avec des paramètres

### Exercice 11

Donner une condition nécessaire et suffisante sur  $\alpha \in \mathbb{R}$  pour que  $\int_0^{+\infty} \frac{t - \sin(t)}{t^\alpha} dt$  converge.

### Exercice 12

Soit  $a > 0$ .

1. Justifier que  $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2+a^2} dt$  est une intégrale impropre convergente.
2. Dans cette question seulement, on pose  $a = 1$ . Montrer que l'intégrale précédente est nulle grâce au changement de variable  $u = \frac{1}{t}$
3. Calculer  $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2+a^2} dt$ .

### Exercice 13

Pour  $n \in \mathbb{N}$  on pose  $I_n = \int_0^1 (\ln(t))^n dt$ . Justifier la convergence et calculer  $I_n$  en fonction de  $n$ .

### Exercice 14

Calculer  $I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} t^{2n} e^{-t^2} dt$  en sachant que  $I_0 = \sqrt{\pi}$ .