Devoir surveillé n°3

Durée : 4H. Calculatrices interdites. **Les candidats sont invités à porter une attention particulière à la rédaction et la propreté : les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.**

Lisez l'énoncé attentivement et en entier **AVANT** de commencer chaque exercice.

Exercice 1 (Questions de cours)

1. Donner le développement en série entière, en précisant pour quelle valeur de la variable x ils sont valables, ainsi que le rayon de convergence :

   (a) $\ln(1+x)$ (b) $\sin(x)$

2. Donner une primitive des fonctions suivantes, en précisant sur quel **intervalle**.

   (a) $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$
   (b) $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
   (c) $x \mapsto \frac{1}{1-x}$
   (d) $x \mapsto \frac{1}{\cos^2(x)}$.

3. Citer le **théorème** du rang.
4. On pose $f : \left\{ \begin{array}{ccc}]-1,1[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{1-x} \end{array} \right.$
   (a) Donner les développements en série entière de f et $x \mapsto (1+x)^\alpha$ pour un $\alpha \in \mathbb{R}$ fixé.
   (b) Soit p un entier naturel non nul. Calculer $f^{(p)}$, la dérivée p-ième de f.
   (c) En déduire que
   $$\forall x \in]-1,1[\ \frac{1}{(1-x)^{p+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{p+n}{n} x^n$$
   (d) Retrouver le résultat précédent, en utilisant le développement en série de $(1+x)^\alpha$.

Exercice 2

Soit n un entier naturel non nul. On pose :
$$J_n = \int_0^\pi \sin^{2n} t \mathrm{d}t$$

1. Montrer, par un changement de variable affine (en posant $u = at+b$ avec a, b des réels fixés à déterminer) que
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} t \ \mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} t \ \mathrm{d}t$$
2. Montrer que
$$J_n = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} t \ \mathrm{d}t$$
3. Rappeler les formules d'Euler, donnant $\cos t$ et $\sin t$ en fonction de e^{it} pour un réel t.
4. Rappeler la formule du binôme de Newton.
5. Calculer, pour $k \in \mathbb{Z}$, $\int_0^\pi e^{ikt}\mathrm{d}t$.
6. A l'aide du binôme de Newton, exprimer, pour tout réel t, $\cos^{2n} t$ en fonction d'exponentielles complexes.
7. Que vaut $\int_0^\pi \cos^{2n} t \ \mathrm{d}t$?
8. En déduire :
$$J_n = \frac{1.3.5\dots(2n-1)}{2^n n!}\pi$$

Exercice 3

On note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 10 & 7 \\ 1 & 4 & 3 \\ -2 & -8 & -6 \end{pmatrix}$$

On note I_3 la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et on pose $u = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Pour une matrice $C \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on note $\mathcal{C}_C = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) | \; CM = MC\}$ l'ensemble des matrices qui commutent avec C.

1. Déterminer une base du noyau et de l'image de f.
2. (a) Déterminer le vecteur v de $\mathbb{R}^3$, dont la deuxième coordonnée dans $\mathcal{B}$ est 1, et tel que $f(v) = u$.

   (b) Démontrer que **le** vecteur w de $\mathbb{R}^3$, dont la deuxième coordonnée dans $\mathcal{B}$ vaut 1, et qui vérifie $f(w) = v$ est $w = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.
3. On note P la matrice de la famille $\mathcal{B}' = (u, v, w)$ dans la base $\mathcal{B}$.

   (a) Montrer que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

   (b) Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.
4. On note $N = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$ la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$. Déterminer N.
5. Question valant 0 point : les matrices A et N sont semblables. Pourquoi ? Vérifier au brouillon qu'elles ont bien la même trace, le même déterminant et le même rang.
6. Calculer explicitement N^k pour tout $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$.
7. Calculer explicitement A^k pour tout $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$.
8. (a) Montrer que $\mathcal{C}_A$ et $\mathcal{C}_N$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

   (b) On pose $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Résoudre l'équation $MN = NM$. En déduire que $\mathcal{C}_N = \mathrm{Vect}(I_3, N, N^2)$. Préciser la dimension de $\mathcal{C}_N$.

   (c) Soit $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Montrer que $B \in \mathcal{C}_A \iff P^{-1}BP \in \mathcal{C}_N$.

   (d) En déduire une base et la dimension de $\mathcal{C}_A$.

Exercice 4

On considère la suite (a_n) définie par $a_0 = a_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}\; a_{n+1} = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}$.

1. Calculer a_2 et a_3.
2. Soit R le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$. On suppose $R > 0$ et on note S la fonction définie sur $]-R, R[$ par $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

   Montrer que
   $$\forall x \in]-R, R[\; xS(x)^2 = S(x) - 1$$
3. En déduire une expression de $S(x)$ en fonction de x (uniquement) sur un intervalle à préciser.

   On pourra considérer $S(x)$ comme une inconnue et utiliser la continuité de S sur $]-R, R[$ pour conclure.
4. Donner le développement en série entière de $\sqrt{1+u}$ puis de $\sqrt{1-4x}$.
5. Simplifier le développement de $\sqrt{1-4x}$. On attend une expression où les seuls produits sont des factorielles ou des puissances.
6. En déduire la valeur de R et l'égalité
   $$\forall n \in \mathbb{N}\; a_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

Exercice 5

Dans cet exercice, nous allons essayer de déterminer des conditions pour que deux matrices soient semblables.

Partie I : exemple géométrique

On note $A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = 2A - I_2$ où I_2 est la matrice identité de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à A et g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à B.

Pour $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ une matrice carrée de taille 2, on note $P_M(X) = X^2 - \mathrm{tr}(M)X + \det(M)$ (que l'on appelle polynôme caractéristique de A).

1. Calculer les polynômes P_A et P_B et préciser leurs racines (éventuellement complexes).
2. Montrer que f est un projecteur (sans préciser ses éléments caractéristiques). Que dire de g ?
3. Déterminer une base de $\ker(f)$ et de $\mathrm{Im}(f)$.
4. En considérant une base adaptée à $\ker(f) \oplus \mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^2$, montrer que A est semblable à $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et B est semblable à $M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
5. Les matrices A et B sont-elles semblables ?

Partie II : cas général

Nous allons, dans le cas général, essayer de trouver une condition nécessaire et suffisante pour que deux matrices carrées de taille 2 soient semblables.

Dans toute cette partie, A désigne une matrice carrée, $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

1. Dans cette question, nous allons établir quelques résultats utiles pour la suite.
   (a) Soit $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, semblable à A. Montrer que $\mathrm{tr}(B) = \mathrm{tr}(A)$ et $\det(B) = \det(A)$.
   (b) Soit $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ semblable à A, et $C \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ semblable à B. Montrer que A et C sont semblables.
   (c) Montrer que $A^2 - (\mathrm{tr}\, A)A + \det(A)I_2 = 0$.
   (d) Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ tels que $\alpha \neq \beta$. On suppose de plus que l'on dispose de deux vecteurs $u, v \in \mathbb{C}^2$ **non nuls** tels que $Au = \alpha u$ et $Av = \beta v$. Montrer que (u, v) est une base de $\mathbb{C}^2$.
2. Cas des homothétie. On suppose, dans cette question seulement, que $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ est une matrice d'homothétie, c'est à dire $A = \lambda I_2$ pour un $\lambda \in \mathbb{C}$.
   (a) Soit B une matrice semblable à A. Donner les coefficients de B.
   (b) Calculer P_A et donner ses racines.
3. Cas de racines distinctes. On suppose dans la question 3 que P_A possède deux racines distinctes α et β. En particulier A n'est pas une matrice d'homothétie.
   (a) Rappeler le lien entre $\mathrm{tr}(A), \det(A)$ (des coefficients de P_A) et α, β. A quelle condition sur $\mathrm{tr}(A)$ et $\det(A)$ a-t-on bien $\alpha \neq \beta$?
   (b) Montrer que $(A - \alpha I_2)(A - \beta I_2) = 0$.
   (c) En déduire que $A - \alpha I_2$ et $A - \beta I_2$ ne sont **pas** inversibles. Montrer alors qu'il existe $u, v \in \mathbb{C}^2$ **non nuls** tels que $Au = \alpha u$ et $Av = \beta v$.
   (d) Montrer que A est semblable à $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$.
   (e) Montrer que si $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ vérifie $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(B)$ et $\det(A) = \det(B)$ alors A et B sont semblables.
4. On suppose dans cette question que A n'est pas une matrice d'homothétie et que P_A possède une racine double $\alpha = -\frac{\mathrm{tr}(A)}{2}$.
   (a) On montre, comme à la question 3 que $(A - \alpha I_2)^2 = 0$ et $A - \alpha I_2 \neq 0$. On pose $M = A - \alpha I_2$. Justifier qu'il existe $u \in \mathbb{C}^2$ tel que $Mu \neq 0$.
   (b) On pose $u \in \mathbb{C}^2$ tel que $Mu \neq 0$ et $v = Mu$. Montrer que (u, v) est une base de $\mathbb{C}^2$.
   (c) En déduire que M est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ puis que A est semblable à $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix}$.
   (d) Soit $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Montrer que B est semblable à A si, et seulement si, B n'est pas une matrice d'homothétie et $\mathrm{tr}(B) = \mathrm{tr}(A)$ et $\det(A) = \det(B)$.