Devoir maison n°4

A rendre le 03/12 (première partie)

Pour tout réel t et pour tout entier $n \geq 1$, on pose

$$S_n(t) \overset{\text{déf.}}{=} \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kt \text{ et } \Sigma_n(t) = \sum_{k=1}^{n} \sin kt.$$

I Echauffement

Dans cette partie (comme dans l'autre d'ailleurs), vous prendrez bien garde à identifier les intégrales : sont-elles des intégrales sur un segment ou des intégrales impropres convergentes ?

1. (a) Rappeler la linéarisation de $\sin a \cos b$.
   (b) Exprimer, pour tout $t \in \mathbb{R}$, la somme partielle $(S_n + i\Sigma_n)(t)$ sans signe $\sum$.
   (c) En déduire alors $S_n(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
   (d) Calculer la valeur de $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \mathrm{d}t$.
2. (a) Démontrer que la fonction f définie sur $[0, \pi]$ par

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t = 0 \\ \dfrac{1}{2\sin(t/2)} - \dfrac{1}{t} & \text{si } 0 < t \leq \pi \end{cases}$$

   est de classe $\mathcal{C}^1$.
   (b) Montrer que sa dérivée est bornée sur son intervalle de définition.
3. (a) Etudier les variations de la fonction

$$g : \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad t \longmapsto \frac{\sin t}{t}.$$

   (b) En déduire les inégalités

$$\frac{2}{\pi} \leq \int_0^{\pi} \frac{2}{t^2} \sin^2 \frac{t}{2} \, \mathrm{d}t \leq \frac{\pi}{2}.$$

II Au coeur du problème (pour le 09/12)

Le but de cette partie est de prouver la convergence et de calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} \mathrm{d}t$. La fonction f qui apparaît ici est la fonction de la partie I.

1. Montrer que

$$\int_0^{\pi} f(t) \sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right] \mathrm{d}t = \frac{2}{2n+1} \int_0^{\pi} f'(t) \cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right] \mathrm{d}t.$$

   L'expression de f n'est pas utile ici. Quelle propriété de f justifie vos calculs ?
2. En déduire un majorant (qui peut dépendre de n) de $\int_0^{\pi} f(t) \sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right] \mathrm{d}t$.
3. Qu'en déduit-on lorsque n tend vers $+\infty$?
4. Justifier, pour $x > 0$, l'égalité :

$$\int_0^{x} \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t = \frac{1 - \cos x}{x} + \int_0^{x} \frac{1 - \cos t}{t^2} \mathrm{d}t.$$

5. Étudier la convergence de l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x$.
6. Montrer, en le justifiant avec soin, que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x = \lim_{n \to +\infty} \int_0^{\pi} \frac{\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right]}{t} \mathrm{d}t.$$

   Indication : Effectuer un changement de variable sur l'intégrale

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right]}{t} \mathrm{d}t.$$

7. En déduire alors la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x$.
8. Étudier, pour $m > 0$, la convergence de l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin mx}{x} \mathrm{d}x$.
9. Calculer, pour tout $m \in \mathbb{R}$, l'intégrale $A(m) \overset{\text{déf.}}{=} \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin mx}{x} \mathrm{d}x$.