Exercice 2

Donner des primitives, en précisant l'intervalle, de :

1. $x \mapsto xe^{-2x^2}$
2. $x \mapsto \frac{x^2}{1+x^3}$
3. $x \mapsto \frac{\ln(\ln(x))}{x}$
4. $x \mapsto \exp(e^x + x)$
5. $x \mapsto \frac{1}{\cos^2(x)\sqrt{\tan(x)}}$
6. $x \mapsto \frac{1}{x\ln^2(x)}$
7. $x \mapsto \tan^2(x)$
8. $x \mapsto \frac{1}{x\sqrt{2+\ln(3x)}}$
9. $x \mapsto \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}$

Correction

1. Il y a deux manière d'approcher ce calcul. Soit on reconnaît une forme $u'e^u$ (ou presque) avec $u : x \mapsto -2x^2$ et dans ce cas une primitive sur $\mathbb{R}$ est $x \mapsto -\frac{1}{2}e^{-2x^2}$.
   Soit on utilise le calcul intégral. Par changement de variable $u = -2x^2$ et donc $\mathrm{d}u = -2x\mathrm{d}x$, $\int xe^{-2x^2}\mathrm{d}x = \int e^u \times \frac{-1}{2}\mathrm{d}u = -\frac{e^u}{2} = -\frac{e^{-2x^2}}{2}$, toujours valable sur $\mathbb{R}$.
2. Cette fois, on reconnaît plutôt $\frac{u'}{u}$ et une primitive sur $]-1,+\infty[$ est $x \mapsto \frac{1}{3}\ln(1+x^3)$. Si on choisit $]-\infty,-1[$ comme intervalle on prendra par exemple $x \mapsto \frac{1}{3}\ln(-1-x^3)$ comme primitive.
3. On travaille pour $x > 1$. On effectue le changement de variable $t = \ln(x)$ et donc $\mathrm{d}t = \frac{1}{x}\mathrm{d}x$. Ainsi $\int \ln(\ln x)\frac{1}{x}\mathrm{d}x = \int \ln(t)\mathrm{d}t = t\ln(t) - t = \ln(x)\ln(\ln(x)) - \ln(x)$ sur $]1,+\infty[$.
4. Pour $x \in \mathbb{R}$, $\exp(e^x + x) = e^x\exp(e^x)$ (de la forme $u'e^u$) et une primitive sur $\mathbb{R}$ est $\exp\circ\exp$.
5. Rappelons que $\tan' = \frac{1}{\cos^2}$. Ainsi on reconnaît une forme $u'u^{-\frac{1}{2}}$. On se place sur un intervalle où $\tan > 0$, par exemple sur $]0,\frac{\pi}{2}[$.
   Alors une primitive est $2\tan^{\frac{1}{2}}$.
6. Cette fois, la forme est $\frac{u'}{u^2}$ et donc une primitive sur $]0,1[$ ou $]1,+\infty[$ est $-\frac{1}{\ln}$.
7. On a également (cf 5) $\tan' = 1 + \tan^2$. Ainsi une primitive sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ est $x \mapsto \tan(x) - x$.
8. Remarquons que $x \mapsto 2 + \ln(3x)$ est dérivable et strictement positive sur $]\frac{e^{-2}}{3},+\infty[$ et de dérivée $x \mapsto \frac{1}{x}$. Ainsi, une primitive de la fonction proposée sur ce même intervalle est $\ln(2 + \ln(3x))$.
9. On peut éventuellement faire un changement de variable $u = x^2$ ou alors directement reconnaître la dérivée (sur $]-1,1[$) de $x \mapsto \frac{1}{2}\arcsin(x^2)$

Convergence

Exercice 7

Etudier la convergence et calculer le cas échéant :

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1-t^2}$.
2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}$.
3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(t+1)(t+2)}\mathrm{d}t$
4. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{e^t-1}\mathrm{d}t$.

Correction

1. LA fonction $f : t \mapsto \frac{1}{1-t^2} = \frac{1}{(1+t)(1-t)}$ est continue sur l'intervalle $[0,1[$ en tant qu'inverse d'une fonction qui ne s'annule pas.
   Par changement de variable bijectif $u = 1 - t$ (et $t = 1 - u$) et de classe $\mathcal{C}^1$, $\int_0^1 f$ à la même nature que $\int_0^1 \frac{1}{(2-u)u}\mathrm{d}u$ qui est cette fois impropre en 0
   Or $\frac{1}{(2-u)u} \underset{0}{\sim} \frac{1}{2u}$ et $\int_0^1 \frac{1}{u}\mathrm{d}u$ diverge. Ainsi par comparaison de fonctions positives, $\int_0^1 \frac{1}{1-t^2}\mathrm{d}t$ diverge.
2. La fonction $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ est continue sur $[0,1[$ par composition et inverse d'une fonction ne s'annulant pas. Pour $x \in [0,1[$ on a $\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}x = \arcsin(x) \underset{x\to 1}{\to} \frac{\pi}{2}$. Ainsi l'intégrale proposée converge vers $\frac{\pi}{2}$.
   On peut refaire le même raisonnement de comparaison qu'à la première question pour prouver la convergence.
3. $f : t \mapsto \frac{1}{(t+1)(t+2)}$ est continue sur $[0,+\infty[$ par inverse d'une fonction continue qui ne s'annule pas.
   De plus, $f(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}$ et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$ converge donc $\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge par comparaison de fonctions positives.
   De plus, pour $x > 0$, on a $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t = \int_0^x \left(\frac{1}{t+1} - \frac{1}{t+2}\right)\mathrm{d}t = \ln(x+1) - \ln(1) - \ln(x+2) + \ln(2) \underset{x\to+\infty}{\to} \ln(2)$ (utiliser la propriété fonctionnelle de ln et le quotient tend vers 1 par équivalents).
4. $f : t \mapsto \frac{1}{e^t-1}$ est continue sur $]0,+\infty[$ par quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas.
   Mais $f(t) \underset{0}{\sim} \frac{1}{t}$ et donc l'intégrale considérée diverge par comparaison de fonctions positives. Par contre, on peut prouver la convergence en $+\infty$ par équivalent (on retrouve une intégrale de référence).

Plus technique

Exercice 8

Calculer, **après** avoir prouvé leurs convergences :

1. $\int\limits_0^{+\infty} e^{-\sqrt{t}}\mathrm{d}t$
2. $\int\limits_0^1 \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$
3. $\int\limits_0^1 \frac{\ln(1-x^2)}{x^2}\mathrm{d}x$
4. $\int\limits_0^1 \frac{\ln(t)}{(1+t)^2}\mathrm{d}t$

Correction

1. $f : t \mapsto e^{-\sqrt{t}}$ est continue sur $[0,+\infty[$ par composition de fonctions continues.
   De plus, $t^2 f(t) \underset{+\infty}{\to} 0$ car $u^4e^{-u} \underset{u\to+\infty}{\to} 0$ par croissances comparées. Ainsi $f(t) = o_{+\infty}(\frac{1}{t^2})$
   Comme $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$ converge, par comparaison de fonctions positives, l'intégrale proposée converge. On pose $u = \sqrt{t}$ ie $t = u^2$ qui donne bien un changement de variable bijectif et $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}_*^+$ dans lui même (attention $\sqrt{.}$ n'est pas dérivable en 0). De plus, $\mathrm{d}t = 2u\mathrm{d}u$ et ainsi $\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{t}}\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} 2ue^{-u}\mathrm{d}u$. il faut effectuer une intégration par parties sur $[0,x]$ comme dans le cours pour obtenir $\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{t}}\mathrm{d}t = 2$ (voir $\Gamma(\beta)$ dans le cours, il s'agit du cas $\beta = 2$).
2. La fonction $f : t \mapsto \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}\mathrm{d}t}$ est continue sur $]0,1]$ par quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas.
   De plus, $t^{\frac{1}{3}}f(t) \underset{0}{\to} 0$ et donc $f(t) = o_0(\frac{1}{t^{\frac{1}{3}}})$ et on conclut par comparaison à la convergence.
   Soit $x \in]0,1]$. $\int_x^1 f(t)\mathrm{d}t = \int_x^1 \frac{\ln(\sqrt{t}^2)}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$ et on effectue le changement de variable $u = \sqrt{t}$ et donc $\mathrm{d}t = 2u\mathrm{d}u$.
   Alors $\int_x^1 f(t)\mathrm{d}t = \int_{\sqrt{x}}^1 4\ln(u)\mathrm{d}u \underset{x\to0}{\to} 4$ (voir le cours).
3. Cette fois on a un prolongement par continuité en 0 (par la valeur -1 car $\ln(1-x^2) \underset{0}{\sim} -x^2$). On traite la convergence en 1 par changement de variable et en se ramenant à $\ln(u)$ en 0.
   Soient $A, B \in]0,1[$ avec $A < B$. On obtient par intégration par parties (d'un produit de deux fonctions $\mathcal{C}^1$ sur $[A,1]$) : $\int_A^B \frac{1}{x^2}\ln(1-x^2)\mathrm{d}x = [-\frac{1}{x}\ln(1-x^2)]_A^B - \int_A^B \frac{-1}{x}\frac{-2x}{(1-x^2}\mathrm{d}x = \cdots - \arcsin(B) + \arcsin(A)$. Quand $B \to 1$ puis $A \to 0$, on obtient $-\frac{\pi}{2}$.
4. On se ramène à $\int_0^1 \ln(t)\mathrm{d}t$ par équivalent, et c'est une intégrale convergente. Pour le calcul, effectuer une IPP sur $[A,1]$ en dérivant ln, puis on traite le produit par décomposition en éléments simples.

Exercice 10

1. Montrer que $\int\limits_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\mathrm{d}t$ converge mais pas $\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\mathrm{d}t$.

   On pose maintenant $f : \left\{ \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\mathrm{d}t \end{array} \right.$.

   Correction Ne pas oublier de parler de la continuité sur $]0,+\infty[$.

   On a $\frac{e^{-t}}{t} \underset{0}{\sim} \frac{1}{t}$ ce qui prouve la divergence de $\int\limits_0^1 \frac{e^{-t}}{t}$ (on compare des fonctions positives).

   Sur $[1,+\infty[$, on remarque que $\frac{e^{-t}}{t} = o_{+\infty}(e^{-t})$ qui est bien intégrable. On conclut par comparaison.

2. Donner un équivalent de f en 0. Indication : au choix une intégration par parties ou une série entière (après avoir ramené l'étude à un intervalle de longueur fini).

   Correction Pour $x > 0$, on a $f(x) = \int\limits_x^1 \frac{e^{-t}}{t}\mathrm{d}t + \int\limits_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\mathrm{d}t$. La première intégrale tend vers $+\infty$ d'après la question précédente quand $x \to 0$. On a déjà $f(x) \underset{0}{\sim} \int\limits_x^1 \frac{e^{-t}}{t}\mathrm{d}t$.

   Pour $t \in \mathbb{R}_+^*$, $\frac{e^{-t}}{t} = \frac{1}{t} + \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}t^n}_{S(t)}$ où S est la somme d'une série entière qui converge sur $\mathbb{R}$ et est donc continue sur $\mathbb{R}$.

   Alors $\int\limits_x^1 \frac{e^{-t}}{t}\mathrm{d}t = -\ln(x) + \int\limits_x^1 S(t)\mathrm{d}t$. Comme S est continue sur $[0,1]$, on a $\int\limits_x^1 S(t)\mathrm{d}t \underset{x\to0}{\to} \int\limits_0^1 S(t)\mathrm{d}t$ qui est une constante et est donc négligeable devant $-\ln(x)$ en 0. Finalement $f(x) \underset{0}{\sim} -\ln(x)$.

3. Après avoir montré que $\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2}\mathrm{d}t = o_{+\infty}\left(\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\mathrm{d}t\right)$, donner un équivalent de f en $+\infty$ en effectuant une intégration par parties.

Correction Les intégrales considérées convergent. La seconde d'après la question 1 et la première car l'intégrande est positif et négligeable devant $\frac{e^{-t}}{t}$ en $+\infty$.
On a $\int\limits_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2}\mathrm{d}t = \int\limits_x^{+\infty} \frac{1}{t}\frac{e^{-t}}{t}\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{x}\int\limits_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\mathrm{d}t$ car $\forall t \in [x,+\infty[\ \frac{1}{t} \leqslant \frac{1}{x}$ et on obtient bien $\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2}\mathrm{d}t = o_{+\infty}\left(\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\mathrm{d}t\right)$

Avec des paramètres

Exercice 11

Donner une condition nécessaire et suffisante sur $\alpha \in \mathbb{R}$ pour que $\int\limits_0^{+\infty} \frac{t-\sin(t)}{t^\alpha}\mathrm{d}t$ converge.

Correction $f : t \mapsto \frac{t-\sin(t)}{t^\alpha}$ est continue sur $]0,+\infty[$ par quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas.

- Etude en $+\infty$.
  sin et bornée et $t \underset{+\infty}{\to} +\infty$ donc $\sin(t) = o_{+\infty}(t)$ et $f(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{t}{t^\alpha} = \frac{1}{t^{\alpha-1}}$.
  Ainsi $\int_1^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge (par comparaison de fonctions positives) ssi $\alpha > 2$.
- Etude en 1.
  On effectue un développement limités de sin en 0 et on trouve que $f(t) \underset{0}{\sim} \frac{t^3}{3t^\alpha} = \frac{1}{3}\frac{1}{t^{\alpha-3}}$. Ainsi (pour la même raison), $\int_0^1 f$ converge ssi $\alpha - 3 < 1$ ie $\alpha < 4$.

Finalement, $\int_0^{+\infty} \frac{t-\sin(t)}{t^\alpha}\mathrm{d}t$ converge ssi $\alpha \in]2,4[$.