Table des matières

I Intégrales dépendant d'un paramètre

I.1 Cadre d'étude

I.1.1 Transformée de Laplace

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ au moins et continue.

La transformée de Laplace de f est la fonction $F(p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}\mathrm{d}t$ quand cette fonction F est bien définie. En particulier, si f est un $O_{+\infty}(t^k)$ pour un $k \in \mathbb{N}$ alors F est bien définie sur $]0, +\infty[$.

Si f est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ alors F est définie sur $[0, +\infty[$.

I.1.2 La fonction Gamma

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. A quelle condition sur α l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^{\alpha-1}e^t\mathrm{d}t$ est-elle convergente ?

Remarquons que $f : t :\mapsto t^{\alpha-1}e^{-t}$ est continue et positive sur $]0, +\infty[$ et même continue en 0 (par prolongement) si $\alpha \geqslant 1$.

— Etude en 0. On a $f(t) \underset{0}{\sim} t^{\alpha-1}$ qui est intégrable au voisinage de 0 ssi $-(\alpha-1) < 1$ ie $\alpha > 0$. Par comparaison de fonctions positives, f est intégrable sur $]0, 1]$ ssi $\alpha > 0$.

— Etude en $+\infty$. On a $t^2 f(t) = t^{\alpha+1}e^{-t} \underset{t\to+\infty}{\to} 0$ par croissances comparées et donc $f(t) = o_{+\infty}(\frac{1}{t^2})$. Par comparaison de fonctions positives, f est intégrable sur $[1, +\infty[$.

Conclusion : f est intégrable sur $]0, +\infty[$ ssi $\alpha > 0$.

On pose maintenant $\Gamma : \left\{ \begin{array}{ccc}]0, +\infty[& \to & \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto & \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t \end{array} \right.$. Cette fonction est bien définie.

I.1.3 Exemple

Montrer que la fonction $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2+x}\mathrm{d}t$ est bien définie sur $]0, +\infty[$.

I.1.4 Exemple

Donner l'ensemble de définition de $f : x \mapsto \int_0^{\pi} \cos(x\sin(t))\mathrm{d}t$.

I.2 Continuité

I.2.1 Théorème

Soit I, J deux intervalles non triviaux de $\mathbb{R}$, $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} I \times J & \to & \mathbb{K} \\ (x,t) & \mapsto & \varphi(x,t) \end{array} \right.$ une fonction.

Supposons que :

1. Pour $x \in I$ fixé, $\varphi_x : t \mapsto \varphi(x,t)$ est continue sur J.
2. Pour $t \in J$ fixé, $\varphi_t : x \mapsto \varphi(x,t)$ est continue sur I.
3. (hypothèse de domination) Il existe $g : J \to \mathbb{R}$ une fonction positive, continue et **intégrable** sur J telle que

$$\forall (x,t) \in I \times J \ |\varphi(x,t)| \leqslant g(t)$$

Alors la fonction $f : \left\{ \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & \int_J \varphi(x,t)\mathrm{d}t \end{array} \right.$ est définie et continue sur l'intervalle I.

Preuve.

On montre juste que f est bien définie, ie que pour $x \in I$ fixé, $\int_J \varphi(x,t)\mathrm{d}t$ converge.

Or pour x fixé, on a $\forall t \in J \ |\varphi(x,t)| \leqslant g(t)$ avec g intégrable sur J. Par comparaison de fonctions positives, $t \mapsto \varphi(x,t)$ est intégrable sur J donc son intégrale converge. Ainsi $f(x)$ existe bien. ■

I.2.2 Remarque

1. La première hypothèse assure que la convergence de l'intégrale $\int_J \varphi(x,t)\mathrm{d}t$ peut avoir du sens.
2. La deuxième hypothèse est "naturelle". On veut que la fonction f qui dépend de x soit continue. Il faut donc partir de fonctions de x qui soient continue.
3. La troisième hypothèse est la plus importante et la plus délicate en pratique. Il faut trouver un majorant de $|\varphi(x,t)|$ qui **ne dépend pas** de la valeur de x mais peut éventuellement dépendre de celle de t.

   Ensuite on prouve que notre fonction majorante est bien intégrable, en utilisant souvent le théorème de comparaisons des fonctions positives.

I.2.3 Exemple

Montrer que $f : x \mapsto \int_0^{\pi} \cos(x\sin(t))\mathrm{d}t$ est continue sur $\mathbb{R}$. On pose $\varphi : (x,t) \mapsto \cos(x\sin(t))$ définie sur $\mathbb{R} \times [0, \pi]$.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. On a déjà vu que $t \mapsto \varphi(x,t)$ est continue sur $[0, \pi]$.

2. Soit $t \in [0, \pi]$ fixé. Alors $x \mapsto \cos(x \sin(t))$ est continue sur $\mathbb{R}$ (de la forme $x \mapsto \cos(\alpha x)$ pour un $\alpha \in \mathbb{R}$ fixé).
3. Dominons ! Soit $(x, t) \in \mathbb{R} \times [0, \pi]$. Alors $|\cos(x \sin(t))| \leqslant 1$. Comme la fonction constante 1 est intégrable sur $[0, \pi]$ on peut appliquer le théorème précédent.

Conclusion : f est continue sur $\mathbb{R}$.

I.2.4 Remarque sur l'hypothèse de domination

Le cas précédent peut se généraliser facilement dans le cas où l'intervalle d'intégration J est un intervalle de la forme $[\alpha, \beta]$. Il suffit de trouver une constante qui majore $|\varphi|$.

Si de plus on a $I = [a, b]$ et que φ est continue sur $[a, b] \times [\alpha, \beta]$ qui est fermé et borné, alors $|\varphi|$ est également continue et donc est bornée sur ce fermé borné (on sait même qu'elle atteint un minimum et un maximum). Ainsi on peut dominer par une constante et conclure.

I.2.5 Proposition
Soit $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction.

Pour $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I si et seulement si f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur tout segment $[a, b]$ inclus dans I.

Preuve.
Commençons par prouver la continuité (ou dérivabilité) de f sous l'hypothèse f est continue (respectivement dérivable) sur tout segment inclus dans I.

Soit $x_0 \in I$. Si x_0 est une borne de I, et J un segment non réduit à un point d'extrémité x_0 et inclus dans I. Alors la continuité de f en x_0 est une continuité à gauche ou à droite et est donc assurée par la continuité sur J.

Si x_0 n'est pas une extrémité de I, on prend cette fois un segment contenant x_0 (de la forme $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$ pour un $\alpha > 0$) et la continuité de f en x_0 est bien assurée (à gauche et à droite).

Les mêmes arguments assurent la dérivabilité.

Le reste de la preuve se fait par récurrence : si f est $\mathcal{C}^{k+1}$ sur tout segment pour un $k \geqslant 0$ fixé, alors f est dérivable sur I et f' est $\mathcal{C}^k$ sur tout segment donc $\mathcal{C}^k$ et finalement f est bien $\mathcal{C}^{k+1}$.

On conclut grâce au principe de récurrence. ∎

I.2.6 Domination locale

$$\Gamma : \left\{ \begin{array}{ccc}]0, +\infty[& \to & \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto & \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} \mathrm{d}t \end{array} \right. .$$

Soit $a, b > 0$ avec $a < b$. Montrer que Γ est continue sur $[a, b]$. On pose $\varphi : (x, t) \mapsto t^{x-1} e^{-t} = e^{(x-1)\ln(t)} e^{-t}$.

1. Pour $x \in [a, b]$ fixé, $t \mapsto \varphi(x, t)$ est continue sur $]0, +\infty[$.
2. Pour $t > 0$ fixé, $x \mapsto \varphi(x, t)$ est continue sur $[a, b]$.
3. Soit $x \in [a, b]$ et $t > 0$. $t^{x-1} e^{-t} \leqslant \begin{cases} t^{a-1} e^{-t} & \text{si } t \in]0, 1] \\ t^{b-1} e^{-t} & \text{si } t \geqslant 1 \end{cases}$.

   Dans tous les cas $|t^{x-1} e^{-t}| \leqslant (t^{a-1} + t^{b-1}) e^{-t}$ qui est intégrable sur $]0, +\infty[$ par somme et d'après l'étude du début de chapitre.

Finalement Γ est continue sur $[a, b]$.

Montrons maintenant que Γ est continue sur $]0, +\infty[$. Soit $x > 0$. Alors Γ est continue sur $[x/2, x + 1]$ et donc continue en x. Ainsi Γ est continue sur $]0, +\infty[$.

I.2.7 Remarque sur la domination

Le raisonnement est très souvent (dans le cas où on parle d'intégrales impropres), de fixer $t \in J$ et trouver la plus grande valeur de $|\varphi(x, t)|$ pour x dans l'intervalle considéré.

I.2.8 Exemple
Montrer que la fonction $f : x \mapsto \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(t)}{t+x} \mathrm{d}t$ est définie et continue sur $\mathbb{R}^+$.

On remarque que même pour $x = 0$, $t \mapsto \frac{\sin(t)}{t}$ se prolonge par continuité en 0 (valeur 1) car $\sin(t) \underset{0}{\sim} t$.

II Dérivabilité

II.1 Approche intuitive

II.1.1 Le résultat désirable

On reprend le cadre précédent et on se demande si la fonction $f : x \mapsto \int_J \varphi(x, t) \mathrm{d}t$ est dérivable. Il s'agit d'une fonction de la variable x, si tout se passait pour le mieux on pourrait dériver par rapport à x comme des brutes :

$$\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \int_J \varphi(x, t) \mathrm{d}t = \int_J \frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial x} \mathrm{d}t$$

II.1.2 Hypothèses

Donner les hypothèses sur φ pour que les intégrales considérées puissent exister.

II.2 Le théorème

II.2.1 Théorème
Soit I, J deux intervalles non triviaux de $\mathbb{R}$, $\varphi : \left\{\begin{array}{ccc} I \times J & \rightarrow & \mathbb{K} \\ (x,t) & \mapsto & \varphi(x,t) \end{array}\right.$ une fonction.

Supposons que :

1. Pour $x \in I$ fixé, $\varphi_x : t \mapsto \varphi(x,t)$ est continue sur J et **intégrable** sur J.
2. Pour $t \in J$ fixé, $\varphi_t : x \mapsto \varphi(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.
3. Pour $x \in I$ fixé, $t \mapsto \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,t) = \varphi_t'(x)$ est continue sur J
4. (hypothèse de domination) Il existe $g : J \to \mathbb{R}$ une fonction positive, continue et **intégrable** sur J telle que

$$\forall (x,t) \in I \times J \ |\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,t)| \leqslant g(t)$$

Alors la fonction $f : \left\{\begin{array}{ccc} I & \rightarrow & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & \int_J \varphi(x,t)\mathrm{d}t \end{array}\right.$ est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle I. De plus, pour $x \in I$

$$f'(x) = \int_J \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,t)\mathrm{d}t$$

II.2.2 Remarque sur les hypothèses

1. Vérifier l'intégrabilité de la fonction de t revient à déterminer le domaine de définition de f. En particulier, si on a déjà prouvé la continuité de f, c'est déjà prouvé !
2. On veut dériver par rapport à x, comme d'habitude, on s'assure que cette opération est licite.
3. Nous n'intégrons que des fonctions continues. Vu la conclusion (désirée, voir le point précédent), cette vérification est naturelle.
4. Cette fois, c'est la dérivée partielle par rapport à x qu'il faut dominer. Les mêmes remarques et techniques s'appliquent. En particulier, le but est d'obtenir un majorant **qui ne dépend pas de** x.

II.2.3 Exemple
Montrer que $f : x \mapsto \int_0^\pi \cos(x\sin(t))\mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

La fonction $\varphi : (x,t) :\mapsto \cos(x\sin(t))$ est dérivable par rapport à x par composition et $\frac{\partial \varphi}{\partial x} : (x,t) \mapsto \sin(t)\cos(x\sin(t))$ est continue sur $\mathbb{R} \times [0,\pi]$. Ceci prouve les 3 premières hypothèses.

Pour $(x,t) \in \mathbb{R} \times [0,\pi]$, $|\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,t)| \leqslant 1$ et 1 est intégrable sur le segment $[0,\pi]$. D'après le théorème de dérivation des intégrales à paramètres, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $f' : x \mapsto \int_0^\pi \sin(t)\cos(x\sin(t))\mathrm{d}t$.

II.2.4 Fonction Γ

Montrer que la fonction Γ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur tout $[a,b]$ segment non trivial de $]0,+\infty[$. On en déduit que Γ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$.

II.2.5 La classe $\mathcal{C}^\infty$

En résumé, pour prouver que f est $\mathcal{C}^\infty$

1. Justifier des continuités.
2. Calculer les dérivées partielles par rapport à x, justifier les continuités par rapport à t puis dominer chaque dérivée.

II.2.6 Exemple
Soit $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-xt}\frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t$. Donner le domaine de définition de f, prouver que f est $\mathcal{C}^1$ et calculer f'.

La fonction φ est $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (x,t) & \mapsto & e^{-xt}\frac{\sin(t)}{t} \end{array}\right.$.

Pour $x = 0$, l'intégrale $f(0)$ converge d'après le cours sur les intégrales. Pour $x > 0$, $|e^{-xt}\frac{\sin(t)}{t}| = o_{+\infty}(\frac{1}{t^2})$ donc $f(x)$ existe bien.

Soient $a > 0$. On va montrer la classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,+\infty[$.

1. Soit $x \geqslant a$ fixé. $t \mapsto \varphi(x,t)$ est continue et intégrable sur $]0,+\infty[$ d'après l'étude précédente.
2. Soit $t > 0$ fixé. $t \mapsto \varphi(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,+\infty[$ et $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,t) = e^{-xt}\sin(t)$.
3. Soit $x \in [a,+\infty[$ fixé. $t \mapsto e^{-xt}\sin(t)$ est continue sur $]0,+\infty[$.
   Remarque : on peut remplacer ces deux dernières vérifications par : $\varphi \in \mathcal{C}^1([a,+\infty[\times]0,+\infty[$
   par composition, produit et quotient dont le dénominateur ne s'annule pas.
4. Soit $x \geqslant a$ et $t > 0$. $|e^{-xt}\sin(t)| \leqslant e^{-at}$ qui est intégrable sur $]0,+\infty[$.

Finalement, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,+\infty[$ et donc (le raisonnement étant valable pour tout $a > 0$) sur $]0,+\infty[$.

De plus, pour $x > 0$, $f'(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt}\sin(t)\mathrm{d}t = \mathrm{Im}(\int_0^{+\infty} e^{-xt+it}\mathrm{d}t) = \mathrm{Im}(\frac{1}{-x+i}) = -\frac{1}{1+x^2}$.

Ainsi $f(x) = K - \arctan(x)$. De plus, pour tout $t > 0$, $|\frac{\sin(t)}{t}| \leqslant 1$ (IAF par exemple), donc $|f(x)| \leqslant \int_0^{-\infty} e^{-xt}\mathrm{d}t = \frac{1}{x}$.

Ainsi $f(x) \underset{x\to+\infty}{\rightarrow} 0$ et finalement $f(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan(x)$ pour tout $x > 0$.

II.2.7 Exemple
On considère la fonction $\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}^+ \times [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ (x,t) & \mapsto & \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} \end{cases}$ et $f : x \mapsto \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} \mathrm{d}t$.

Montrons que f est bien définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$

- Soit $x \geqslant 0$ fixé. Alors $\varphi_x : t \mapsto \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}$ est continue sur le segment $[0,1]$ donc intégrable.
  Ainsi f est bien définie sur $\mathbb{R}^+$.
- Soit $t \in [0,1]$ fixé. Alors $\varphi_t : x \mapsto \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}$ est bien dérivable par composition (et produit par une constante) et pour $x \geqslant$ on a $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,t) = -2xe^{-x^2(1+t^2)}$.
- Soit $x \geqslant 0$ fixé. Alors $t \mapsto 2xe^{-x^2(1+t^2)}$ est bien continue sur $[0,1]$ par composition (et produit par une constante).
- Soient $a, b \geqslant 0$ avec $a < b$.
  $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ est continue sur $[a,b] \times [0,1]$ qui est fermé et borné donc est bornée par une constante $M \in \mathbb{R}^+$ qui est intégrable sur $[0,1]$.

On a montré que f est $\mathcal{C}^1$ sur tout segment $[a,b] \subset [0,+\infty[$ (on peut prendre $a=0$) et donc f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$.

De plus, pour $x \geqslant 0$

$$f'(x) = \int_0^1 -2xe^{-x^2}e^{-x^2t^2}\mathrm{d}t = -2e^{-x^2}\int_0^1 e^{-(xt)^2}x\mathrm{d}t = -2e^{-x^2}\int_0^x e^{-u^2}\mathrm{d}t$$

Si on pose $g : x \mapsto \int\limits_0^x e^{-t^2}\mathrm{d}t$ alors g est la primitive de $t \mapsto e^{-t^2}$ sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0 et on a $f'(x) = -2g'(x)g(x) = -(g^2)'(x)$.

Ainsi $f = -g^2 + K$ où K est une constante à déterminer. Comme $f(0) = \frac{\pi}{4}$ et $g(0) = 0$, on a $K = \frac{\pi}{4}$.

De plus, $f(x) \underset{x \to +\infty}{\to} 0$ car f est positive et vérifie $0 \leqslant f(x) \leqslant \int\limits_0^1 e^{-x^2}\mathrm{d}t = e^{-x^2}$. Comme $g(x) \geqslant 0$ pour $x \geqslant 0$ on en déduit que $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.