Exercice 1 (Entraînement personnel)
Donner des primitives (en précisant sur quel intervalle) de :

$$x \mapsto \frac{1}{x \ln x}, x \mapsto \cos(2x), t \mapsto \frac{2}{\sqrt{1-t^2}}, t \mapsto \frac{2}{4+t^2}$$

Applications directes du cours

Exercice 2
Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y' + y \tan t = \cos(t)$ *sur* $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.
2. $y' + \frac{y}{t^2-5t+6} = t^2 - 4t + 4$ *et* $y(0) = 1$.

Exercice 3
Résoudre sur $\mathbb{R}$ *les équations différentielles suivantes :*

1. $y'' + y' = e^x$ *et* $y(0) = e, y'(0) = 0$.
2. $y'' + y' + y = 2\sin 2x$.
3. $y'' + iy' + 2y = e^{x(1+i)}$.
4. $y'' + 2y' + y = \operatorname{ch} x$.

Extension des solutions

Exercice 4
Résoudre l'équation différentielle $2xy' - 3y = 2\sqrt{x}$ *d'inconnue* y. *Y-a-t-il des solutions définies sur* $\mathbb{R}^+$ *?*

Exercice 5
Résoudre $xy' - y = x^2$ *sur* $\mathbb{R}_+^*$ *et sur* $\mathbb{R}_-^*$. *Peut-on trouver des solutions sur* $\mathbb{R}$ *?*

Revenir à des équations connues

Exercice 6
Résoudre sur $\mathbb{R}$ *l'équation différentielle* $(1+x)^2y'' + (1+x)y' = 2$.

Exercice 7
Résoudre l'équation $\frac{y'}{y} + \ln(y) = 0$. *On pourra effectuer un changement d'inconnue.*

Exercice 8
Considérons l'ensemble $E = \{f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) | \ \forall (x,t) \in \mathbb{R}^2 \ f(x+t) = f(x)f(t)\}$.

1. *Montrer que si* $f \in E$ *alors* f *est la fonction nulle ou* f *ne s'annule pas.*
2. *Calculer* $f(0)$ *pour* $f \in E$ *qui n'est pas la fonction nulle.*
3. *Montrer qu'une fonction* f *dérivable sur* $\mathbb{R}$ *est un élément de* E *ssi* f *vérifie une équation différentielle d'ordre 1 que l'on précisera.*
4. *Déterminer les éléments de* E.

Résolution guidée

Exercice 9
Résoudre $y'' + y' - 6y = xe^{-2x}$ *en cherchant une solution particulière sous la forme* $y_p : x \mapsto (ax+b)e^{-2x}$ *où* $a, b \in \mathbb{R}$.

Exercice 10
Résoudre l'équation $x^2y''(x) - 4xy'(x) + 6y(x) = x$ *sur* $\mathbb{R}_+^*$. *On introduira une nouvelle variable* t *telle que* $e^t = x$ *ou encore* $t = \ln(x)$. *On considère ensuite la fonction* $f(t) = y(x) = y(e^t)$. *On change en fait de fonction inconnue également.*