

Techniques de base

Exercice 1

Montrer que les fonctions suivantes sont continues :

- $f_1 : x \mapsto \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^x(t) dt$ sur \mathbb{R}^+ .
- $f_2 : x \mapsto \int_0^{+\infty} \sqrt{t} e^{-xt} dt$ sur $[a, +\infty[$ pour $a > 0$ puis sur \mathbb{R}_+^* .

Exercice 2

Montrer que les fonctions suivantes sont de classe \mathcal{C}^1 :

- $f_1 : x \mapsto \int_{-\pi}^{\pi} \ln(1 + x \sin(t)) dt$ sur $[-a, a]$ pour $a \in]0, 1[$. Sur quel intervalle f_1 est-elle \mathcal{C}^1 finalement ?
- $f_2 : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t} e^{-t} dt$ sur \mathbb{R} .

Applications

Exercice 3

- Étudier l'existence, la continuité et la dérivabilité sur \mathbb{R} de

$$f : x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos(xt) dt.$$

- Déterminer une équation différentielle simple vérifiée par f et en déduire une valeur simple pour $f(x)$ (on pourra admettre que $f(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$).

Exercice 4

Pour $x, y > 0$, on pose $F(x, y) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt} - e^{-yt}}{t} dt$.

- Pour $y > 0$ fixé, montrer que $x \mapsto F(x, y)$ est de classe \mathcal{C}^1 sur tout intervalle $[a, +\infty[$ où $a > 0$.
- Justifier que la question précédente entraîne la classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+^* .
- Calculer $\frac{\partial F}{\partial x}$ et en déduire la valeur de $F(x, y)$ pour tout $x, y > 0$.

Exercice 5

- Étude géométrique** Donner un paramétrage par l'abscisse curviligne de la courbe paramétrée vérifiant

$$\gamma(s) = s, \quad M(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ou encore, la courbure au point de paramètre s (l'abscisse curviligne d'origine 0) vaut s .

Utilisation : cette courbe paramétrée est utilisée pour amorcer les virages après une ligne droite (voies ferroviaires, sortie d'autoroute) : le fait que la courbure augmente linéairement permet d'éviter l'à-coup que provoquerait le passage d'une ligne droite à un arc de cercle (penser force centrifuge et rayon).

- Point asymptote** Nous allons montrer que la courbe $\begin{cases} x(t) = \int_0^t \cos(u^2) du \\ y(t) = \int_0^t \sin(u^2) du \end{cases}$ possède un point asymptote en $+\infty$.

Soit $F : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{C} \\ x & \mapsto i \int_0^1 \frac{e^{ix^2(t^2+1)}}{t^2+1} dt + \left(\int_0^x e^{iu^2} du \right)^2 \end{cases}$

- Montrer que $F \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Calculer F' . Conclusion ?

INDICATION : effectuer le changement de variable $u = xt$ sur la bonne intégrale...

- On pose $G : A \mapsto \int_0^A e^{iu^2} du$. Montrer que G admet une limite complexe en $+\infty$.

- Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{t^2 e^{ix^2 t^2}}{t^2 + 1} dt$.

INDICATION : effectuer une intégration par parties en intégrant $t \mapsto 2t e^{ix^2 t^2}$.

- En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{e^{ix^2 t^2}}{t^2 + 1} dt$.

- En déduire $\int_0^{+\infty} e^{iu^2} du$ en admettant que ses parties réelles et imaginaires sont positives.

- Conclure pour notre courbe paramétrée, puis pour celle de la question 1.