Exercice 1

Premier exemple

1. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

$$f(x,y,z) = 0 \iff \begin{cases} -x + y = 0 \\ y - z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \iff y = x \text{ et } y = z \iff x = y = z$$

   Ainsi $\ker f$ est l'ensemble des vecteurs dont les trois coordonnées sont égales, ie $\ker f = \text{Vect}\,((1,1,1))$. Donc $\dim(\ker f) = 1$.

   En outre $\text{Im}\, f = \text{Vect}(f(1,0,0), f(0,1,0), f(0,0,1)) = \text{Vect}((1,0,0),(1,1,1),(0,-1,-1))$. Les deux premiers vecteurs de cette famille sont linéairement indépendants (forment une famille libre), et d'après le théorème du rang, forment donc une base de $\text{Im}\, f$ (famille libre à deux éléments dans un espace de dimension 3-1 = 2). On aurait également pu observer que la somme des deux premiers vecteurs est l'opposé du troisième qui est donc combinaison linéaire des deux premiers.

   On ne peut pas choisir $p = 1$ car $(1,1,1) \in \ker f \cap \text{Im}\, f$ (et l'intersection n'est donc pas l'espace nul) donc ces espaces ne sont pas supplémentaires dans E.

2. On a $f^2(x,y,z) = f(y-x, y-z, y-z) = (y-z-(y-x), 0, 0) = (x-z, 0, 0)$. Ainsi $(x,y,z) \in \ker f^2 \iff x = z$ (on a trouvé une équation). Les vecteurs de $\ker f$ s'écrivent donc sous la forme $(z,y,z) = x(0,1,0) + z(1,0,1)$. Ainsi une base de $\ker f^2$ est $((0,1,0),(1,0,1))$.

   On a $\text{Im}\, f^2 = \text{Vect}(1,0,0)$.

   On remarque en outre que $\ker f^2 \cap \text{Im}\, f^2 = \{0\}$. En effet, si $(x,y,z) \in \ker f^2 \cap \text{Im}\, f^2$ alors $(x,y,z) = \alpha(1,0,0) = \beta(0,1,0) + \gamma(1,0,1)$ pour des réels α, β, γ. Mais alors $\alpha(1,0,0) - \beta(0,1,0) - \gamma(1,0,1) = 0$ et donc $\gamma = \beta = 0$ puis $\alpha = 0$.

   Finalement $\dim \ker f^2 + \text{rg}\, f^2 = 3$ (théorème du rang appliqué à f^2) et $\ker f^2 \cap \text{Im}\, f^2 = \{0\}$ donc $\ker f^2$ et $\text{Im}\, f^2$ sont supplémentaires dans E.

3. On a, pour $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, $f^3(x,y,z) = f(x-z,0,0) = (z-x,0,0) = -f^2(x,y,z)$ donc $f^3 = -f^2$. Ainsi $\ker f^3 = \ker f^2$ et $\text{Im}\, f^3 = \text{Im}\, f^2$ donc $p = 3$ convient également.

Deuxième exemple

4. Premièrement, si $P \in \mathbb{R}_3[X]$, alors $P' \in \mathbb{R}_2[X] \subset \mathbb{R}_3[X]$ et $P \in \mathbb{R}_3[X]$. Donc $P' + mP$ qui est une combinaison linéaire d'éléments de $\mathbb{R}_3[X]$ est dans $\mathbb{R}_3[X]$ car c'est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel (on peut aussi observer que $\deg(P' + mP) \leqslant \max(\deg P', \deg(mP)) \leqslant 3$).

   Deuxièmement, soient $P, Q \in \mathbb{R}_3[X]$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, on a

$$f_m(\alpha P + \beta Q) = (\alpha P + \beta Q)' + m(\alpha P + \beta Q) = \alpha P' + m\alpha P + \beta Q' + m\beta Q = \alpha f_m(P) + \beta f_m(Q)$$

   f_m est bien linéaire à valeurs dans $\mathbb{R}_3[X]$, donc $f_m \in \mathcal{L}(R_3[X])$.

   On aurait aussi pu remarquer que f_m est une combinaison linéaire de la dérivation et $Id_{\mathbb{R}_3[X]}$ donc est dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}_3[X])$ car $\mathcal{L}(\mathbb{R}_3[X])$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

5. Calculons l'image de la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$ par f_m. On a $f_m(1) = 0 + m, f_m m(X) = 1 + mX, f_m(X^2) = 2X + mX^2, f_m(X^3) = 3X^2 + mX^3$. Ainsi la matrice dans la base canonique $\mathcal{B} = (1, X, X^2, X^3)$ de f_m est

$$A = \begin{pmatrix} m & 1 & 0 & 0 \\ 0 & m & 2 & 0 \\ 0 & 0 & m & 3 \\ 0 & 0 & 0 & m \end{pmatrix}$$

   On en déduit que $\text{rg}(f_m) = \text{rg}(A) = \begin{cases} 4 \text{ si } m \neq 0 \\ 3 \text{ si } m = 0 \end{cases}$

6. Pour $m \neq 0$, $\text{rg}(f_m) = 4 = \dim(\mathbb{R}_3[X])$ donc f_m est bijective et ainsi $\ker(f_m) = \{0\}, \text{Im}(f_m) = \mathbb{R}_3[X]$.

   Dans le cas $m = 0$, $\text{Im}(f_m) = \text{Vect}(1, 2X, 3X^3) = \mathbb{R}_2[X]$ et $\ker(f_m) = \text{Vect}(1)$ (c'est un espace de dimension 1 d'après le théorème du rang, qui contient 1 d'après le calcul de la matrice précédente).

7. — Si $m \neq 0$, alors $\ker f_m = \{0\}$ et $\text{Im}\, f_m = \mathbb{R}_3[X]$. Ce deux espaces étant supplémentaires dans $\mathbb{R}_3[X]$, $p = 1$ convient.

— On suppose maintenant $m = 0$.

On a alors $\ker f_0 \cap \operatorname{Im} f_0 = \mathbb{R}_0[X] \neq \{0\}$. Donc ces espaces ne sont pas supplémentaires et $p = 1$ ne convient pas. Calculons $\ker f_0^2$ et $\operatorname{Im} f_0^2$.

$f_0^2 : P \mapsto P''$. Un polynôme est de dérivée seconde nulle ssi son degré est 1 au maximum. Donc $\ker f_0^2 = \mathbb{R}_1[X]$. De plus, la dérivée seconde d'un polynôme de $\mathbb{R}_3[X]$ est de degré 1 au maximum. Donc $\operatorname{Im} f_0^2 \subset \mathbb{R}_1[X]$. Or $\dim(\operatorname{Im} f_m) + \dim(\ker f_m) = 4$ donc $\dim(\operatorname{Im} f_m) = 2$, et finalement $\operatorname{Im} f_0^2 = \mathbb{R}_1[X] = \ker f_0^2$. Ces deux espaces ne sont pas supplémentaires.

$f_0^3 : P \mapsto P^{(3)}$. Les même considérations de degrés montrent que $\ker f_0^3 = \mathbb{R}_2[X]$ et $\operatorname{Im} f_0^2 \subset \mathbb{R}_0[X]$. Encore une fois le théorème du rang nous donne l'égalité des dimensions et donc l'autre inclusion : $\operatorname{Im} f_0^2 = \mathbb{R}_0[X]$. Ainsi $\ker f_0^3 \cap \operatorname{Im} f_0^3 = \mathbb{R}_0[X] \neq \{0\}$.

$f_0^4 : P \mapsto P^{(4)}$. Or la dérivée quatrième d'un polynôme de $\mathbb{R}_3[X]$ est nulle donc $f^4 = 0$, donc $\ker f_0^4 = \mathbb{R}_3[X]$ et $\operatorname{Im} f_0^4 = \{0\}$. Ces deux espaces sont maintenant supplémentaires et donc $p = 4$ convient.

Cas général

1. Si $f \in GL(E)$ alors $\ker f = \{0\}$ et $\operatorname{Im} f = E$. Ces deux espaces étant supplémentaires dans E, $p = 1$ convient. Mais pour $p \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, on a également $f^p \in GL(E)$ donc p vérifie (1).

   Ainsi tous les entiers naturels entre 1 et n conviennent.

2. Soit $k \in \mathbb{N}$.

   — Montrons que $K_k \subset K_{k+1}$. Soit donc $x \in \ker(f^k)$, ie $f^k(x) = 0$. Alors $f^{k+1}(x) = f(f^k(x)) = f(0) = 0$. Et donc $x \in \ker f^{k+1}$.

   Finalement on a bien $K_k \subset K_{k+1}$

   — Soit $x \in \operatorname{Im} f^{k+1}$. Soit $y \in E$ tel que $x = f^{k+1}(y)$. Alors $x = f^k(\underbrace{f(y)}_{\in E})$. Ainsi $x \in \operatorname{Im} f^k$, c'est à dire

   $I_{k+1} \subset I_k$.

3. La suite $(d_k)_k$ est une suite croissante d'entier naturels majorée par n. Ainsi elle est stationnaire. Il existe donc un rang k_0 tel que $\forall k \geqslant k_0\ d_k = d_{k_0}$.

   En particulier $d_{k_0+1} = d_{k_0}$. Comme $K_{k_0} \subset K_{k_0+1}$, on en déduit que $K_{k_0+1} = K_{k_0}$.

   Pour tout $\ell < p$, on a $K_\ell \neq K_{\ell+1}$, donc $d_\ell < d_{\ell+1}$ ie $d_\ell \leqslant d_{\ell+1} - 1$. Ainsi par récurrence immédiate (de 1 à $p-1$) on a $d_1 \leqslant \mathrm{d}_p - p$. Mais $d_1 > 0$ (car f est non injective) et $d_p \leqslant n$ donc $0 < n - p - 1$ ie $p - 1 < n$ ou encore $p \leqslant n$.

4. On va montrer par récurrence que la propriété "$\mathcal{P}_k : K_p = K_{p+k}$" est vraie pour tout $k \in \mathbb{N}$

   On a déjà $K_p = \mathbb{K}_p$ et $K_p = K_{p+1}$. Ainsi $\mathcal{P}_0$ et $\mathcal{P}_1$ son vraies.

   Supposons que pour un $k \in \mathbb{N}$ fixé on ait $K_{k+p} = K_p$. Montrons que $K_{k+p+1} \subset K_{k+p}$. Grâce à la question 2 on aura alors $K_{k+p+1} = K_{k+p}$.

   Soit $x \in K_{k+p+1}$, c'est à dire $f^{p+1+k}(x) = 0$, ie $f^{p+1}(f^k(x)) = 0$. Ainsi $f^k(x) \in K_{p+1}$. Mais $K_{p+1} = K_p$, donc $f^k(x) \in K_p$, ie $f^p(f^k(x)) = 0$. Finalement $x \in K_{k+p}$.

   On a montré par récurrence que $\forall k \in \mathbb{N}\ K_{k+p} = K_p$.

5. On sait maintenant que la suite $(d_k)_k$ stationne à partir du rang p. Or $\forall k \in \mathbb{N}\ d_k + \operatorname{rg}(f^k) = n$ d'après le théorème du rang.

   Ainsi la suite $(rg(f^k))_k$ stationne également à partir du rang p (à la valeur $n - d_p$). Soit $k \in \mathbb{N}$

   On a donc $\dim I_{p+k} = \dim I_p = n - d_p$ et $I_{p+k} \subset I_p$ donc $I_p = I_{p+k}$.

6. On a déjà grâce au théorème du rang : $\dim(\ker f^p) + \dim(\operatorname{Im} f^p) = n$. Il reste à montrer que l'intersection de ces espaces est $\{0\}$.

   Soit $x \in K_p \cap I_p$. C'est à dire $f^p(x) = 0$ et il existe $y \in E$ tel que $x = f^p(y)$. Ainsi $f^p(f^p(y)) = 0$, ie $y \in K_{2p}$. Or $2p \geqslant p$ donc $K_{2p} = K_p$. Finalement $y \in K_p$ donc $x = f^p(y) = 0$.

   On a prouvé que $K_p \oplus I_p = E$.

Troisième exemple

1. Le vecteur $(1, 1, 1)$ est clairement d'image nulle par f. On pose donc $\varepsilon_1 = (1, 1, 1)$.

   On peut encore une fois deviner un vecteur ε_2 tel que $f(\varepsilon_2) = (1, 1, 1)$ (ex : $(0, -2, -1)$). La méthode générale consiste à résoudre

$$\begin{cases} x - z = 1 \\ -x - 2y + 3z = 1 \\ -y + z = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x - z = 1 \\ -2y + 2z = 2 \\ -y + z = 1 \end{cases}$$

Les deux dernières équations sont proportionnelles. On peut fixer la valeur de z et en déduire celle de y. On prend $z = 1$. Alors $y = 0$ puis la première équation donne $x = 2$ (Rappel : il s'agit ici de donner UNE solution).
On pose $\varepsilon_2 = (2, 0, 1)$. Ce n'est bien sûr pas la seule solution. On pourrait prouver que les vecteurs solutions sont de la forme $\varepsilon_2 + \lambda\varepsilon_1$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.
La même méthode conduit à $\varepsilon_3 = (3, 0, 1)$ (ici encore, plusieurs possibilités) dont l'image par f est bien ε_2 (à vérifier absolument le jour J).

2. Cette famille possédant 3 vecteurs de $\mathbb{R}^3$ qui est de dimension 3, il suffit de montrer qu'elle est libre. Soient donc $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha\varepsilon_1 + \beta\varepsilon_2 + \gamma\varepsilon_3 = 0$. Alors

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta + 3\gamma = 0 \\ \alpha = 0 \\ \alpha + \beta + \gamma = 0 \end{cases}$$

On a immédiatement $\alpha = 0$, puis, en retranchant 2 fois la dernière ligne à la première, $\gamma = 0$ et enfin $\beta = 0$.
Finalement la famille $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est libre et est donc une base de $\mathbb{R}^3$.
On aurait également pu calculer le déterminant dans la base canonique.

3. On obtient, par définition des vecteurs de $\mathcal{B}$: $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Ainsi $\mathrm{Im}(M) = \mathrm{Vect}(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})$ et donc $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ et $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ est libre d'après la question précédente.
Il s'agit donc d'une base de $\mathrm{Im}(f)$.
De même, $\ker(f) = \mathrm{Vect}(\varepsilon_1)$ et (ε_1) est non nul donc forme bien une base de $\ker(f)$.
L'intersection $\ker(f) \cap \Im(f) = \mathrm{Vect}(\varepsilon_1)$ est non nulle donc on ne peut pas choisir ε_1

4. On obtient facilement $M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $M^3 = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$.

Ainsi $\ker(f^2) = \mathrm{Vect}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ et $\mathrm{Im}(f_2) = \mathrm{Vect}(\varepsilon_1)$ ne sont pas supplémentaires et donc $p = 2$ ne convient pas.
Comme pour le deuxième exemple, $f^3 = 0$ donc $p = 3$ convient.

Quatrième exemple

1. Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
$f(u) = 0$ ssi $\forall i \in \mathbb{N} v_i = u_{i+1} = 0$ ssi $\forall i \geqslant 1\ u_i = 0$. C'est à dire que tous les termes de u sont nuls sauf éventuellement le premier.
Ainsi $\ker f$ est l'ensemble des suites qui stationnent en 0 à partir du rang 1 (c'est un espace de dimension 1).
Soit $v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On définit la suite u par $u_0 = 0$ (ou tout autre nombre réel vous passant par la tête) et $\forall i \in \mathbb{N}\backslash\{0\} u_i = v_{i-1}$. Alors $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et on a clairement $f(u) = v$, c'est à dire que $v \in \mathrm{Im}\, f$. Finalement $\mathrm{Im}\, f = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, c'est à dire que f est surjective.

2. — Soit $u \in \mathbb{R}^n$. On note $w = f^2(u)$. Alors $\forall i \in \mathbb{N} w_i = u_{i+2}$.
   Ainsi $u \in \ker f$ ssi u stationne en 0 à partir du rang 2.
   — Comme f est surjective, $f \circ f$ l'est également et $I_2 = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

   La généralisation du raisonnement précédent est immédiate :
   — K_k est l'ensemble des suites qui stationnent en 0 à partir du rang k (car $\forall i \in \mathbb{N}\ f^k(u)_i = u_{k+i}$)
   — f^k est toujours surjective, en tant que composée de fonctions surjectives.

   Ainsi $I_k = \mathbb{R}_{\mathbb{N}}$.

3. Pour tout $k \geqslant 1$ on a $I_k = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ donc $K_k \cap I_k = K_k \neq \{0\}$. Ainsi (1) n'est jamais vérifié.
On en déduit que $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ n'est pas de dimension finie.