Matrices

Antoine Louatron

Table des matières

I Calcul sur les matrices

I.1 Opérations

Explication On va maintenant parler de matrices sans référence préalable à un système. On considère juste les tableaux de nombres. Dans la suite $n, p, r \dots$ sont des entiers naturels non nuls dès que ces lettres seront utilisées pour des dimensions de matrice.

I.1.1 Notation

L'ensemble des matrices à coefficients dans $\mathbb{K}$, à n lignes et p colonnes est noté $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Les cas particuliers dont on se servira le plus sont :

1. Les matrices carrées de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ que l'on note $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
2. Les matrices colonnes de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ que l'on peut identifier aux vecteurs de $\mathbb{K}^n$.
3. Les matrices lignes de $\mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{K})$

I.1.2 M-Remarque

Par définition même des matrices, les coefficients sont uniques. On peut ainsi "identifier" les coefficients matriciels.

I.1.3 Définition

Soient $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. (préciser les ensembles de valeurs pour chaque indice)

On pose $A + B = (a_{i,j} + b_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\lambda A = (\lambda a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Explication Comme pour les vecteurs donnés par leurs coordonnées, on effectue les opérations coordonnée par coordonnée.

I.1.4 Exemple

Calculer $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2+i & 3 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 1+i & 1 \\ 1-i & 2+i \end{pmatrix}$.

I.1.5 Exemple

La matrice carrée de taille n ayant tous ses coefficients nuls sauf la diagonale qui est composée de 1 est notée I_n. C'est la matrice identité.

La matrice de taille $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$dont tous les coefficients sont nuls est la matrice nulle, notée 0 voire $0_{n,p}$

I.1.6 Colonnes d'une matrice

Décomposer le vecteur du membre de gauche d'une système sous forme de somme factorisée par les inconnues.

I.1.7 Définition

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ (ou $\mathbb{K}^p$).

Le produit de A par X est $AX = \begin{pmatrix} a_{1,1}x_1 + \dots + a_{1,p}x_p \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + \dots + a_{n,p}x_p \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Si on note $C_1, \dots C_p \in \mathbb{K}^n$ les colonnes de A, $AX = x_1C_1 + x_2C_2 + \dots + x_pC_p$.

I.1.8 Exemple

On va pouvoir résumer les systèmes linéaires à l'aide de produit matriciels.

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.
2. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} =$.
3. Tout système peut donc se mettre sous la forme $AX = B$ où A est la matrice associée au système homogène, X le vecteur des inconnues et B le vecteur second membre.
4. $\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = xx' + yy' + zz'$.
5. Toute matrice multipliée par la colonne nulle donne la colonne nulle.

I.1.9 Définition

Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{p,r}(\mathbb{K})$. Le produit matriciel AB est la matrice $C \in \mathcal{M}_{n,r}(\mathbb{K})$ telle que $c_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k}b_{k,j}$.

Si on note $C'_1, \dots C'_r \in \mathbb{K}^p$ les colonnes de B, alors les colonnes de AB sont $AC'_1, AC'_2, \dots, AC'_r$

I.1.10 Inteprétation sur les lignes

Soit $L = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$ et $E \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont les lignes sont notées $L_1, \dots L_n$. Alors $LA = x_1L_1 + x_2L_2 + \cdots + x_nL_n$

Attention Ce n'est pas parce qu'on peut multiplier A par B pour obtenir AB que l'on peut calculer BA. Penser aux dimensions. Ceci nous amène à nous méfier, on ne doit pas pouvoir dire que $AB = BA$ même si les deux produits sont possibles (donner les contraines sur les dimensions !)

I.1.11 Exemple

1. Produit d'une ligne par une matrice 2×2.
2. Produit d'une 2×3 par une 3×2.
3. Produit d'une matrice par $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
4. Produit de $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ par une matrice.
5. Produit d'une matrice par l'identité.

I.1.12 Remarque

AB est la matrice dont la colonne j est le produit de A par la colonne j de B. De la même manière, AB est la matrice dont la ligne i est le produit de la ligne i de A par B. (produits dans cet ordre).

I.1.13 Définition

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On appelle transposée de A la matrice $(a'_{ij} = a_{ji})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ i \leqslant j \leqslant p}}$ de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ et on la note ${}^tA$.

Explication La première ligne devient la première colonne et réciproquement. Ainsi de suite pour les deuxièmes lignes et colonnes.

I.1.14 Exemple

Transposée d'une matrice ligne, transposée de $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$.

I.1.15 Proposition

Pour toute matrice A on a ${}^t({}^tA) = A$

I.2 Propriétés des opérations

I.2.1 Proposition (Propriétés de l'addition)

Soient $A, B, C \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. *$A + 0 = A$ où 0 est la matrice nulle de taille n, p.*
2. *$(A + B) + C = A + (B + C)$.*
3. *La matrice M de coefficients $(-a_{i,j})$ est l'opposée de A c'est à dire $M + A = A + M = 0_{n,p}$. On la note $-A$*
4. *$A + B = B + A$.*

De plus $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$.

Preuve.

Trivial. Il suffit de faire les opérations sur chaque coordonnées. ∎

I.2.2 Remarque

$-A = (-1).A$.

I.2.3 Proposition
Soient $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. *Alors* ${}^t(\lambda A + \mu B) = \lambda {}^t A + \mu {}^t B$.

Preuve.
On commence par remarque que les matrices qui apparaissent dans cette égalités sont toutes dans $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ et qu'il y a donc pas d'incompatibilité de dimension.

Avec des notations évidentes, $\lambda A + \mu B = (\lambda a_{i,j} + \mu b_{i,j})$.

Donc le coefficient d'indice i, j de sa transposée ($i \in [\![1, p]\!]$ et $j \in [\![1, n]\!]$) est $(\lambda a_{j,i} + \mu b_{j_i})$ qui est bien la combinaison linéaire des coefficients impliqués des matrices ${}^t A$ et ${}^t B$. ∎

I.2.4 Exemple
Calculer la transposée de $\frac{A \pm {}^t A}{2}$.

I.2.5 Exemple
$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ Calculer AB et BA.

I.2.6 Piège
Le produit matriciel n'est pas commutatif. De plus un produit de matrice peut être nul sans qu'aucune des matrices en jeu ne le soit.

I.2.7 Proposition
Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ *et* $C \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$.

1. $\underbrace{(\underbrace{AB}_{\in \mathcal{M}_{n,q}})\underbrace{C}_{\in \mathcal{M}_{q,r}}}_{\in \mathcal{M}_{n,r}} = \underbrace{A(BC)}_{\in \mathcal{M}_{n,r}}$.
2. $I_n A = A = A I_p$.
3. *On ne peut pas dire* $AB = 0 \Rightarrow A = 0$ *ou* $B = 0$.
4. *Dans le cas général,* $AB \neq BA$ *même quand on peut calculer les deux produits et qu'ils ont la même taille.*

Preuve.
On montrera l'associativité plus tard.

La seconde propriété est triviale si on se sert de l'interprétation par lignes ou colonnes du produit matriciel. ∎

I.2.8 Proposition
Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), B, C \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $\lambda \in \mathbb{K}$.

$$A(B + C) = AB + AC \text{ et } \lambda AB = (\lambda A)B = A(\lambda B)$$

Preuve.
La première proposition est facile si on considère l'interprétation par colonnes du produit matriciel.

La seconde est triviale. ∎

I.2.9 Exemple
Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Alors $A \begin{pmatrix} x + y \\ x + 2y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} + A \begin{pmatrix} y \\ 2y \end{pmatrix} = xA \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + yA \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

$A(\lambda X + \mu Y)$ avec X, Y des colonnes.

I.2.10 Proposition
Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. *Alors* ${}^t(AB) = {}^t B {}^t A$

Preuve.
On note $C = AB$. Alors $c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}$, donc $c'_{ij} = c_{ji} = \sum_{k=1}^{p} a_{jk} b_{ki} = \sum_{k=1}^{n} b'_{ik} a'_{kj}$. ∎

I.3 Matrices carrées

I.3.1 Notation

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée on note $A^0 = I_n$ et $A^p = A \times \dots \times A$ (p fois).

I.3.2 Exemple

Factoriser $A^2 - 3A + 2I_n$

I.3.3 Lemme

Soient $A, B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ telle que $AB = BA$. Alors $AB^kA^r = B^kA^{r+1}$ et $A^rB^kA = A^{r+1}B^k$.

(Remarquer que ces écritures, tout comme la notation précédente n'a du sens que grâce à l'associativité du produit matriciel)

I.3.4 Corollaire

Soit $n \in \mathbb{N}, A, B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$. Si $AB = BA$ alors

$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^{n-k} B^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{n-k} A^k B^{n-k}$$

I.3.5 Exemple

Calculer toutes les puissances de $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

En déduire les puissances de $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

I.3.6 Corollaire

Soit $n \in \mathbb{N}, A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Si $AB = BA$ alors

$$A^n - B^n = (A-B) \sum_{k=0}^{n-1} A^k B^{n-1-k} = (A-B) \sum_{k=0}^{n-1} A^{n-1-k} B^k$$

I.3.7 Exemple

Appliquer à $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B = I_n$

I.3.8 Exemple

On définit deux suites $(u_n), (v_n)$ par $u_0 = v_0 = 1$ et $u_{n+1} = v_n$, $v_{n+1} = u_n + v_n$ pour tout n. Calculer u_n et v_n en fonction de n.

I.4 Matrices particulières

I.4.1 Définition

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. *Si $A = {}^tA$ on dit que A est symétrique.*
2. *Si $A = -{}^tA$ on dit que A est antisymétrique.*

I.4.2 Exemple

Exemples en dimension 3.

I.4.3 Exemple

Produit de matrices symétriques qui commutent, $A + {}^tA$.

I.4.4 Définition

Une matrice carrée est dite diagonale si tous ses coefficients non diagonaux sont nuls. Une telle matrice est de la forme $\begin{pmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix}$. *On la note $diag(a_1, \dots, a_n)$.*

Plus généralement les coefficients diagonaux d'une matrice carrée sont les coefficients pour lesquels les indices de ligne et de colonne sont égaux.

I.4.5 Exemple

1. I_n est toujours diagonale.

2. Calculer $\text{diag}(1,2,3)\times\text{diag}(2,-1,2)$.

I.4.6 Proposition
Si D_1 et D_2 sont deux matrices diagonales alors $\lambda D_1+\mu D_2$ est encore diagonale pour tout $\lambda,\mu\in\mathbb{K}$.
De plus D_1D_2 est diagonale et est obtenu par "produit direct des coefficients" et donc pour tout $p\in\mathbb{N}$, $diag(a_1,\dots,a_n)^p = diag(a_1^p,\dots,a_n^p)$.

I.4.7 Définition
Une matrice carrée est dite triangulaire supérieure (resp. inférieure) si tous les coefficients strictement en dessous (resp. au dessus) de sa diagonale sont nuls.

I.4.8 Exemple

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\0&4&5\\0&0&6\end{pmatrix}\text{ est triangulaire supérieure et }\begin{pmatrix}1&0&0\\1&2&0\\3&4&5\end{pmatrix}\text{ est triangulaire inférieure.}$$

I.4.9 Remarque
La transposée d'une matrice triangulaire supérieure est triangulaire inférieure. Et réciproquement.

I.4.10 Proposition
Une combinaison linéaire de matrices triangulaires supérieures (resp inférieures) est triangulaire supérieure (resp inférieure). Un produit de matrices triangulaires supérieures (resp inférieures) est triangulaire supérieure (resp inférieure).

Preuve.
On prouve le cas $n=3$. La stabilité par $+,\times$ est similaire dans le cas général.

Soient $A=\begin{pmatrix}a&b&c\\0&d&e\\0&0&f\end{pmatrix}$ et $A'=\begin{pmatrix}a'&b'&c'\\0&d'&e'\\0&0&f'\end{pmatrix}$ deux matrices triangulaires supérieures de $\mathcal{M}_3(\mathbb{K})$.

Alors $A+A'=\begin{pmatrix}a+a'&b+b'&c+c'\\0&d+d'&e+e'\\0&0&f+f'\end{pmatrix}$ est bien triangulaire supérieure.

De même $AA'=\begin{pmatrix}aa'&ab'+bd'&ac'+be'+cf'\\0&dd'&de'+ef'\\0&0&ff'\end{pmatrix}$ est encore triangulaire sup. ∎

II Matrices inversibles

II.1 Opérations élémentaires

II.1.1 Définition
On appelle matrice élémentaire (de taille n) la matrice I_n ayant subit une opération élémentaire sur les lignes.

II.1.2 Notation
Soient $i,j\in[\![1,n]\!]$ et $\lambda\in\mathbb{K}$ (corps des coefficients de nos matrices).

1. Notons $B_{i,j}$ la matrice résultat de $Li\leftrightarrow L_j$. C'est une matrice de permutation.
2. Notons $B_{i,\lambda}$ le résultat de $L_i\leftarrow\lambda L_i$ $(\lambda\neq0)$. C'est une matrice de dilatation.
3. Notons $B_{i,j,\lambda}$ le résultat de $L_i\leftarrow L_i+\lambda L_j$ $(i\neq j)$. C'est une matrice de transvection.

II.1.3 Proposition
Soit $A\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Effectuer une opération élémentaire sur les lignes de A est équivalent à multiplier A à gauche par la matrice élémentaire correspondante.

Preuve.
C'est trivial à condition de se souvenir de l'interprétation par lignes d'une multiplication à gauche. ∎

II.1.4 Exemple
Réduire la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et traduire en termes de produit matriciel. On conservera la trace cumulée de la matrice par laquelle on multiplie A.

II.1.5 Réversibilité

1. $B_{i,j}^2 = I_n$.
2. $B_{\lambda,i} B_{\frac{1}{\lambda},i} = I_n = B_{\frac{1}{\lambda},i} B_{\lambda,i}$.
3. $B_{\lambda,i,j} B_{-\lambda,i,j} = I_n = B_{-\lambda,i,j} B_{\lambda,i,j}$.

On dit que ces matrices sont inversibles (elles ont un symétrique pour $\times$).

II.1.6 Théorème
Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Alors il existe $E \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ un produit de matrices élémentaires tels que $A = ER$ où $R \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est LA matrice échelonnée réduite équivalente à A (la matrice R est échelonnée et tous les pivots sont égaux à 1 et seuls non nuls dans leurs colonnes).

Preuve.
C'est la traduction en termes de produits matriciels de l'algorithme du pivot de Gauss. ∎

II.1.7 Opérations sur les colonnes
On peut également réduire une matrice en effectuant des opérations élémentaires sur les colonnes (remplacer les L par des C...) Pour interpréter en terme de produit matriciel, il faut maintenant multiplier à droite par une matrice identité (de taille p) ayant subit la même transformation.

On dit que deux matrices A et A' qui se déduisent l'une de l'autre par opérations sur les colonnes sont équivalentes par colonnes et on note $A \underset{C}{\sim} A'$.

II.2 Matrices inversibles

II.2.1 Définition
Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite inversible ssi il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que

$$AB = I_n = BA.$$

Dans ce cas on note $B = A^{-1}$ et pas $\frac{1}{A}$. En particulier on ne notera pas de quotients de matrices, mais des produits par l'inverse.

On note $GL_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées de taille n inversibles.

II.2.2 Sur la notation de fraction
Pour $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec B inversible, on ne peut pas noter $\frac{A}{B}$: la notation est ambiguë. En effet le résultat pourrait être $B^{-1}A$ ou AB^{-1}, matrices qui sont priori distinctes.

II.2.3 Résolution de systèmes
Considérons le système carré $AX = Y$ avec X l'inconnue et Y le second membre. Si A est inversible alors $X = A^{-1}Y$ est la seule solution.

II.2.4 Proposition
On dit que $GL_n(\mathbb{K})$ est un groupe pour $\times$:

1. *$I_n \in GL_n(\mathbb{K})$*
2. *Le produit de deux matrices $A, B \in GL_n(\mathbb{K})$ inversibles est encore inversible et on a $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.*
3. *Si $A \in GL_n(\mathbb{K})$ alors A^{-1} est inversible et $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$.*

Preuve.
On a déjà vu que le produit est associatif et possède un neutre qui est I_n. Il ne reste qu'à montrer que $\times$ est bien une loi interne dans $GL_n(\mathbb{K})$, c'est à dire prouver les deux autres points.

Si $A, B \in GL_n(\mathbb{K})$ alors $(AB)B^{-1}A^{-1} = AI_nA^{-1} = AA^{-1} = I_n$. Le calcul dans l'autre sens est tout à fait similaire.

De plus $A^{-1}A = I_n = AA^{-1}$ prouve que A^{-1} est inversible et que son inverse est A. ■

II.2.5 Théorème
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

$$A \underset{L}{\sim} I_n \iff A \in Gl_n(\mathbb{K}) \iff (\forall X \in \mathbb{K}^n \ AX = 0 \iff X = 0) \iff \mathrm{rg}(A) = n$$

En d'autre terme, une matrice carrée de taille n est inversible ssi son rang est n ssi la seule solution du système homogène associé est la solution nulle (pas de paramètre).

Preuve.
- Si $A \underset{L}{\sim} I_n$ alors on a $EA = I_n$ avec E un produit de matrices élémentaires qui sont inversibles donc $E \in Gl_n(\mathbb{K})$. En multipliant par E^{-1} à gauche on obtient $A = E^{-1}$ donc A est inversible.
- Supposons A inversible et montrons que $AX = 0 \iff X = 0$ pour toute colonne $X \in \mathbb{K}^n$.
  On suppose donc que $X \in K^n$ vérifie $AX = 0$. Alors $A^{-1}AX = A^{-1}0 = 0$ donc $X = 0$.
- On suppose que 0 est la seule solution de $AX = 0$ et on montre que $A \underset{L}{\sim} I_n$.
  Le système homogène associé à A possède une seule solution, donc n'a pas de paramètre. Donc $\mathrm{rg}(A) = n$.
- Supposons $\mathrm{rg}(A) = n$. Mais I_n est la seule matrice échelonnée réduite carrée de taille n qui soit de rang n. Ainsi $A \underset{L}{\sim} I_n$. ■

II.2.6 Exemple
Montrer que $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 8 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible.

II.2.7 Remarque
Toute matrice inversible est donc une matrice produit de matrices d'opérations élémentaires : on peut écrire $EA = I_n$ d'après le théorème II.1.6 et donc $E = A^{-1}$. Nous disposon maintenant d'une première méthode effective du calcul de l'inverse : il s"agit de réduire A completement jusqu'à trouver I_n en effectuant les mêmes opérations sur I_n. Les opérations doivent être effectués simultanement sur A et I_n. A la fin on doit trouver I_n et A^{-1}.

II.2.8 Exemple
Inverser la matrice $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

II.2.9 Lemme
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. A est inversible ssi $BA = I_n$ pour une certaine matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

On a alors automatiquement $AB = I_n$ et donc les matrices A et B sont inversibles et inverses l'une de l'autre.

Preuve.
Une implication est triviale. Supposons que $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifie $BA = I_n$.

Alors pour toute colonne X on a $AX = 0 \Rightarrow BAX = 0 \iff X = 0$ et donc A est inversible et alors forcément $B = A^{-1}$ (par produit par A^{-1} par exemple). ■

II.2.10 Proposition
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. A est inversible ssi pour tout $Y \in K^n$ le système $AX = Y$ d'inconnue X admet une unique solution $A^{-1}B$ ssi ***pour tout*** *$Y \in \mathbb{K}^n$ le système $AX = Y$ admet au moins une solution.*

Preuve.
- Si A est inversible $AX = Y \iff X = A^{-1}Y$ donc le système admet une unique solution.

- Si un système admet une unique solution alors il en a au moins une.
- Supposons que $AX = Y$ admet au moins une solution pour tout $Y \in \mathbb{K}^n$. Montrons que A est inversible. On prend $Y = E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}$. On obtient au moins une solution C_1. on a donc $AC_1 = E_1$. De même avec le 1 en deuxième position, on obtient au moins une solution C_2...
  On considère la matrice $M = (C_1|C_2|\dots|C_n)$ carrée de taille n. Alors clairement $AM = I_n$ par interprétation en colonnes du produit matriciel. Ainsi A et M sont inversibles d'après le lemme. ∎

II.2.11 Méthode de calcul de l'inverse

1. Pour calculer l'inverse d'une matrice A, il suffit donc de résoudre $AX = Y$ avec $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ un vecteur paramétré (on garde des lettres comme coefficients). On lit les coefficients de A^{-1} dans chaque ligne de la solution unique.
2. On peut également réduire par lignes (ou colonnes, mais il faut choisir une fois pour toute) la matrice A en gardant trace des opérations pour construire la matrice E et on obtient à la fin $EA = I_n$ (ou $AE = I_n$ dans le cas des colonnes) et donc $E = A^{-1}$.

II.2.12 Exemple
Calculer l'inverse de $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ en passant par un système puis celui de $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

II.2.13 Proposition
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. A est inversible ssi ${}^tA$ est inversible et alors $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$.

Preuve.
Il suffit de poser le calcul. ∎

II.2.14 Proposition
Une matrice triangulaire A est inversible ssi ses coefficients diagonaux sont tous non nuls. Alors son inverse est triangulaire (de même forme) et ses coefficients diagonaux sont les inverses de ceux de A.

Preuve.
C'est évident pour les matrices diagonales (qui sont à la fois triangulaires inférieures et supérieures). Pour le cas général, essayer de réduire une matrice triangulaire : la moitié du travail est déjà fait. ∎