

Table des matières

I Produit scalaire et norme 1

 I.1 Produit scalaire 1

 I.2 Norme et distance 2

II Orthogonalité 3

 II.1 Familles orthogonales 3

 II.2 Bases orthonormées 4

 II.3 Créer des bases orthogonales ou orthonormales 4

III Espaces orthogonaux 5

 III.1 Orthogonal d'un sev 5

 III.2 Projections et symétries orthogonales 6

IV Automorphismes orthogonaux 8

 IV.1 Isométries 8

 IV.2 Matrices orthogonales 9

V Matrices symétriques réelles 11

 V.1 Lien avec le produit scalaire 11

 V.2 Théorème spectral 12

Dans tout le chapitre, les espaces vectoriels considérés seront des \mathbb{R} -ev.

I Produit scalaire et norme

I.1 Produit scalaire

I.1.1 Définition

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel.

Un produit scalaire sur E est une application $\left\{ \begin{array}{l} E \times E \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto (x|y) \end{array} \right.$ qui a les propriétés suivantes :

1. Bilinéaire : $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \forall u, v, w \in E (\lambda u + \mu v|w) = \lambda(u|w) + \mu(v|w)$ et $(u|\lambda v + \mu w) = \lambda(u|v) + \mu(u|w)$.
2. Symétrique : $\forall u, v \in E (u|v) = (v|u)$.
3. Positive : $(u|u) \geq 0$.
4. Définie : $(u|u) = 0 \Rightarrow u = 0$

Un produit scalaire est donc une forme bilinéaire, symétrique, définie, positive.

Notation. Un produit scalaire est aussi parfois noté $\langle u, v \rangle$, ou $u \cdot v$.

Explication Cette définition du produit scalaire nous permet de nous passer de la notion d'angle et de distance (ou norme).

I.1.2 Définition

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel munit d'un produit scalaire. On dit alors que E est un espace préhilbertien réel, et si E est de dimension finie on dit que E est un espace euclidien.

I.1.3 Remarque

1. La bilinéarité implique que $(0_E|u) = (u|0_E) = 0$ pour tout $u \in E$.
2. Pour vérifier qu'une application est bilinéaire, on vérifie une seule linéarité. Ensuite on prouve la symétrie, qui prouve à son tour automatiquement la deuxième linéarité.

I.1.4 Exemple

Il faut connaître ces exemples, ainsi que savoir les prouver.

1. Produit scalaire canonique sur \mathbb{R}^n : $\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \\ \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right) \mapsto \sum_{i=1}^n x_i y_i \end{array} \right.$
 - Chaque produit $x_i y_i$ égal $y_i x_i$ donc l'application est bien symétrique. Soit $X, X', Y \in \mathbb{R}^n, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
 - Alors $(\lambda X + \mu X'|Y) = \sum_{k=1}^n (\lambda x_k + \mu x'_k) y_k = \sum_{k=1}^n (\lambda x_k y_k + \mu x'_k y_k) = \lambda(X|Y) + \mu(X'|Y)$.
 - De plus, $\lambda(X|Y) + \mu(X'|Y) = (\lambda X + \mu X'|Y) = (Y|\lambda X + \mu X') = \lambda(Y|X) + \mu(Y|X')$, ce qui prouve la deuxième linéarité, comme prévu.
 - Avec les même notations, $(X|X) = \sum_{k=1}^n x_k^2$. Cette somme est composée de termes positifs donc est positive. De plus, elle est nulle ssi tous ses termes sont nuls. Ainsi $(\cdot|\cdot)$ est positive est définie.

On remarque que $(X|Y) = {}^tXY$ si on prend une notation en colonnes. La linéarité en devient triviale.

2. Cette fois $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On pose $\varphi : (A, B) \mapsto \text{tr}({}^tAB)$. Montrons que φ est un produit scalaire. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. $\varphi(B, A) = \text{tr}({}^tBA) = \text{tr}({}^t({}^tAB)) = \varphi(A, B)$ car la trace est invariante par transposition.

La linéarité à droite est immédiate par composition de deux applications linéaires.

Calculons $\varphi(A, A)$. On note $A = (a_{i,j})_{i,j \in \llbracket 1, n \rrbracket}$. Alors $\text{tr}({}^tAA) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{k,i} a_{k,i}$ est

la somme des carrés de tous les coefficients de A . Ainsi $\varphi(A, A) \geq 0$ et on a même $\varphi(A, A) = 0$ ssi tous les termes de la somme sont nuls (somme de réels positifs) ie $A = 0$.

3. Montrons que $\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (f, g) \mapsto \int_a^b fg \end{array} \right.$ est bien un produit scalaire.

La symétrie provient de la commutativité du produit dans $\mathbb{R}^{[a, b]}$. La linéarité à gauche est une conséquence immédiate de la linéarité de l'intégrale.

Soit $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$. Alors $(f|f) = \int_a^b f^2(t)dt \geq 0$ par positivité de l'intégrale.

De plus si $(f|f) = 0$ alors $\int_a^b f^2 = 0$ et donc f^2 est une fonction continue, positive et d'intégrale nulle : elle est nulle sur le segment $[a, b]$. Ainsi $f^2 = 0$ et donc $f = 0$.

4. On se place dans $E = \mathbb{R}[X]$ et pour $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ on pose $\varphi(P, Q) = \int_0^1 P(t)Q(t)dt$.

Montrons que φ est un produit scalaire. Symétrie, bilinéarité, positivité : voir l'exemple précédent.

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\varphi(P, P) = 0$. Montrons que P est le polynôme nul. Pour l'instant on sait que la fonction polynomiale associée est nulle sur le segment $[0, 1]$. Ainsi P possède une infinité de racines et est donc le polynôme nul.

I.1.5 Remarque

On peut le plus souvent définir plusieurs produits scalaires sur un même espace. Par exemple, $\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \right) \mapsto xx' + 2yy'$ est un autre produit scalaire sur \mathbb{R}^2 .

I.2 Norme et distance

I.2.1 Définition

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel muni d'un produit scalaire (ie. E est un espace préhilbertien).

1. On appelle norme (euclidienne) d'un vecteur $u \in E$ le réel positif $\|u\| = \sqrt{(u|u)}$.
2. On appelle distance (euclidienne) entre deux vecteurs $u, v \in E$ le réel positif $d(u, v) = \|v - u\| = \|u - v\|$.

I.2.2 Remarque

On prendra bien garde au fait que la distance ainsi définie dépend du produit scalaire. Calculer $\|\vec{i}\|$ et $\|\vec{j}\|$, la norme sur \mathbb{R}^2 étant associée au produit scalaire de I.1.5.

I.2.3 Proposition

Soit E un espace préhilbertien et $x, y \in E$.

1. $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2(x|y) + \|y\|^2$

2. $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$ (identité du parallélogramme)

3. $(x|y) = \frac{\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2}{2} = \frac{\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2}{4}$

Preuve.

Calculs directs. ■

I.2.4 Théorème (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel muni d'un produit scalaire et $u, v \in E$. Alors

$$|(u|v)| \leq \|u\| \|v\|$$

Il y a égalité si et seulement si u et v sont colinéaires.

Preuve.

Soient $u, v \in E$ fixés.

On considère l'application $f : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto (u + tv|u + tv) \end{cases}$.

Alors $f \geq 0$ par positivité du produit scalaire. De plus, pour $t \in \mathbb{R}$ on a

$$\begin{aligned} f(t) &= (u + tv|u + tv) = (u|u + tv) + t(v|u + tv) = (u|u) + t(u|v) + t(v|u) + t^2(v|v) \\ &= \|u\|^2 + 2t(u|v) + t^2\|v\|^2 \end{aligned}$$

Ainsi f est une fonction polynomiale de degré au plus 2.

- Si $v \neq 0$ (ie $\|v\| \neq 0$), alors f est polynomiale de degré 2 et positive. Donc son discriminant est négatif : $\Delta = 4(u|v)^2 - 4\|u\|^2\|v\|^2 \leq 0$, ce qui est l'inégalité de Cauchy-Schwartz.
- Si $v = 0$, alors $(u|v) = 0$ et donc l'inégalité est vérifiée.

Dans le cas, $v \neq 0$, l'inégalité est une égalité ssi $\Delta = 0$ ssi f s'annule une fois ssi $\exists t \in \mathbb{R} u + tv = 0$ (norme nulle). Ainsi u et v sont colinéaires

Dans le cas $v = 0$, l'égalité est tout le temps vérifiée, tout comme le fait d'être colinéaire à 0. ■

I.2.5 Exemple

1. Soient $f, g \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$. Alors $\left| \int_a^b fg \right| \leq \int_a^b |fg| \leq \sqrt{\int_a^b f^2} \sqrt{\int_a^b g^2}$.

exo : appliquer à $f : t \mapsto t^{-\alpha}, g : t \mapsto t^{\alpha-1}$ pour $\alpha \neq \frac{1}{2}$ pour retrouver le théorème de croissances comparées.

$$2. \sum_{k=1}^n k\sqrt{k} \leq \frac{n(n+1)}{2} \sqrt{\frac{2n+1}{3}}.$$

I.2.6 Exercice

Soit I un intervalle de \mathbb{R} . On note $\mathcal{L}^2(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions dont le carré est intégrable sur I . Montrer que $(f, g) \mapsto \int_I fg$ définit bien un produit scalaire sur $\mathcal{L}^2(I, \mathbb{R})$. On pourra utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwartz pour prouver que fg est intégrable sur I .

I.2.7 Corollaire (Minkowski)

Soient $u, v \in E$ (où E est encore un espace préhilbertien).

1. $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$ avec égalité ssi u et v sont colinéaires de même sens (positivement proportionnels).
2. $|\|u\| - \|v\|| \leq \|u - v\|$

Preuve.

On a immédiatement, d'après Cauchy-Schwarz

$$\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + 2(u|v) + \|v\|^2 \leq \|u\|^2 + 2\|u\|\|v\| + \|v\|^2 = (\|u\| + \|v\|)^2$$

Comme la fonction racine carré est croissante sur \mathbb{R}_+ , on a l'inégalité voulue.

Il y a égalité ssi $(u|v) = \|u\|\|v\|$. Dans ce cas, on a d'après le théorème I.2.4, $u = \lambda v$ ou $v = 0$ et donc $\lambda\|v\|^2 = |\lambda|\|v\|^2$, ie $v = 0$ ou $\lambda \geq 0$. Dans les deux cas, u et v sont colinéaires de même sens. La réciproque est immédiate par le même calcul.

Pour le deuxième point, on applique l'inégalité triangulaire à $\|(u - v) + v\|$ et à $\|(v - u) + u\|$.

I.2.8 Remarque

Faire un dessin : inégalité triangulaire.

I.2.9 Propriétés de la norme

Soit $u \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. $\|u\| = 0 \iff u = 0$
2. $\|\lambda u\| = |\lambda|\|u\|$
3. $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$

Toutes les applications qui ont ces trois propriétés sont appelées normes.

I.2.10 Définition-Proposition

Soit E un espace préhilbertien. La **distance** associée au produit scalaire de E est l'appli-

cation $d : \begin{cases} E^2 & \rightarrow \mathbb{R}^+ \\ (x, y) & \mapsto \|x - y\| \end{cases}$. Elle possède les propriétés suivantes.

1. $\forall (x, y) \in E^2 \ d(x, y) = d(y, x)$ (symétrie)
2. $\forall (x, y) \in E^2 \ d(x, y) \geq 0$ et $(d(x, y) = 0 \iff x = y)$ (séparation).
3. $\forall (x, y, z) \in E^3 \ d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (inégalité triangulaire).

II Orthogonalité

II.1 Familles orthogonales

II.1.1 Définition

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel muni d'un produit scalaire. Soient $u, v, u_1, \dots, u_n \in E$

1. On dit que u est unitaire, ou normé ssi $\|u\| = 1$.
2. u et v sont dits orthogonaux ssi $(u|v) = 0$. On note $u \perp v$.
3. (u_1, \dots, u_n) est dite orthogonale ssi les u_i sont orthogonaux deux à deux.
4. (u_1, \dots, u_n) est dite orthonormale ssi elle est orthogonale et tous les u_i sont unitaires. Autrement dit $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2 \ (u_i|u_j) = \delta_{i,j}$.

Explication La notion d'orthogonalité repose maintenant sur le produit scalaire, contrairement à la géométrie de début d'année. On a pas du tout de notion d'angle.

II.1.2 ATTENTION

Deux vecteurs sont orthogonaux pour un produit scalaire donnée, et pas forcément pour le produit scalaire voisin... ■

II.1.3 Exemple

Montrer que la base canonique de \mathbb{R}^n est orthonormale pour le produit scalaire canonique.

Montrer que 1 et $t \mapsto \sin(2\pi t)$ sont orthogonales pour le produit scalaire que l'on connaît sur $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$.

II.1.4 Passer à une famille orthonormale

Soit (e_1, \dots, e_n) une famille de vecteurs orthogonaux tous non nuls. Alors $(\frac{e_1}{\|e_1\|}, \dots, \frac{e_n}{\|e_n\|})$ est une famille orthonormale.

II.1.5 Proposition

Soit E un espace préhilbertien et $(u_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ une famille de vecteurs orthogonaux deux à deux et **tous non nuls**. Alors $(u_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ est libre.

Preuve.

Supposons que $\sum_{i=1}^n \lambda_i u_i = 0_E$. Alors en effectuant le produit scalaire par u_i on obtient $\lambda_i \|u_i\|^2 = 0$, d'où $\lambda_i = 0$. ■

II.1.6 Remarque

On peut supposer que la famille (u_i) est une famille infinie et faire la même preuve pour toute sous-famille finie. Ainsi la proposition précédente est valable pour une famille quelconque.

II.1.7 Théorème (Pythagore)

Soit (x_1, \dots, x_n) une famille orthogonale d'un espace préhilbertien.

$$\left\| \sum_{i=1}^n x_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^n \|x_i\|^2$$

Preuve.

Simple calcul de bilinéarité. ■

II.2 Bases orthonormées**II.2.1 Théorème**

Soit E un espace euclidien (donc E est de dimension finie) et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base **orthonormale** de E . Soient $x, y \in E$.

1. $x = \sum_{i=1}^n (x|e_i)e_i$, c'est à dire que la coordonnée¹ de x sur le vecteur e_i est $(x|e_i)$.
2. On note (x_1, \dots, x_n) les coordonnées de x dans \mathcal{B} et (y_1, \dots, y_n) les coordonnées de y dans \mathcal{B} . Alors

$$(x|y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n \text{ et } \|x\|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n (x|e_i)^2$$

3. Si on note $X = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$ et $Y = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(y)$ (les colonnes des coordonnées), $(x|y) = {}^t X Y$.

Preuve.

1. On a $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$. Ainsi $(x|e_1) = x_1 (e_1|e_1) + x_2 (e_2|e_1) + \dots + x_n (e_n|e_1) = x_1$ (par linéarité du produit scalaire et orthogonalité de la famille).
2. On a par le même calcul $(x|y) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} x_i y_j (e_i|e_j) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ car tous les autres termes sont nuls. ■

II.2.2 Exemple

Montrer que la famille $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ est une base orthonormale directe de \mathbb{R}^2 (pour le produit scalaire canonique).

Donner les coordonnées de $u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans cette base. Faire le lien avec les matrices de passage.

II.2.3 Corollaire

Soit E un espace euclidien et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base **orthonormée** de E . Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On note $A = (a_{i,j})_{i,j \in \llbracket 1, n \rrbracket} = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.

Alors $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ $a_{i,j} = (f(e_j)|e_i)$.

Preuve.

On a en effet, pour un $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ fixé $f(e_j) = \sum_{i=1}^n (f(e_j)|e_i)e_i$ d'après le théorème précédent. ■

II.2.4 Mnémotechnie

Pour calculer la matrice de f dans \mathcal{B} , *a priori* on calcule les coordonnées de $f(e_j)$ pour trouver la j ème colonne. Utile pour se souvenir sur quel indice porte l'application de f .

II.3 Créer des bases orthogonales ou orthonormales**II.3.1 Théorème (Orthogonalisation de Gram-Schmidt)**

Soit E un espace euclidien et (e_1, \dots, e_n) une base de E . Alors il existe une base (u_1, \dots, u_n) de E vérifiant

- (u_1, \dots, u_n) est orthogonale
- $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ $\text{Vect}(u_1, \dots, u_k) = \text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$.

On peut imposer $\|u_i\| = 1$, c'est à dire que la famille (u_1, \dots, u_n) soit orthonormale (il suffit de diviser u_i par $\|u_i\| \neq 0$). Si on impose de plus que $(e_k|u_k) > 0$ pour tout k , alors la famille obtenue est unique.

Preuve.

Dessin

On note $F_k = \text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$ pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et on pose P_k : “il existe une famille orthogonale (u_1, \dots, u_k) telle que $\text{Vect}(u_1, \dots, u_k) = F_k$ ”

— P_1 est clairement vraie, il suffit de poser $u_1 = e_1$. (ou $\frac{e_1}{\|e_1\|}$).

Il existe clairement un seul vecteur de $\text{Vect}(e_1)$ de norme 1 et tel que $(u_1|e_1) > 0$, et c'est $\frac{e_1}{\|e_1\|}$ (et on a $(e_1|u_1) = \|e_1\| > 0$).

— Soit $k \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket$, on suppose que P_k est vraie.

On remarque d'abord que $e_{k+1} \notin F_k$, d'après la liberté de la famille $(e_i)_i$.

On cherche u_{k+1} sous la forme $e_{k+1} - x$, avec $x \in F_k = \text{Vect}(e_1, \dots, e_k) = \text{Vect}(u_1, \dots, u_k)$. On écrit donc $x = \sum_{i=1}^k \alpha_{ik} u_i$. On veut maintenant

$$\forall i \in \llbracket 1, k \rrbracket (e_{k+1} - x|u_i) = 0 \text{ ie } \forall i \in \llbracket 1, k \rrbracket (e_{k+1}|u_i) - \alpha_{ik} \|u_i\|^2 = 0$$

On pose donc $u_{k+1} = e_{k+1} - \sum_{i=1}^k \frac{(e_{k+1}|u_i)}{\|u_i\|^2} f_i \neq 0$ car $e_{k+1} \notin F_k$. C'est un vecteur de F_{k+1} mais pas de F_k , donc $\text{Vect}(u_1, \dots, u_{k+1}) = F_{k+1}$.

Tout vecteur de $\text{Vect}(e_1, \dots, e_{k+1})$ qui n'est pas dans $\text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$ s'écrit $\lambda e_{k+1} - x$ avec $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et $x \in F_k$. Ainsi d'après le calcul précédent tout vecteur orthogonal à tous les u_i pour $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$ est de la forme λu_{k+1} . Il existe un seul vecteur de norme 1 et tel que $(u|e_{k+1}) > 0$ dans $\mathbb{R}f_{k+1}$, c'est le vecteur $\pm \frac{u_{k+1}}{\|u_{k+1}\|}$ (le signe étant choisi pour garder le produit scalaire positif).

— Par récurrence, une base orthogonale de E existe. ■

II.3.2 En pratique

Il faut connaître le résultat général, et savoir appliquer pour de “petites familles”. Pour savoir appliquer, il faut retenir la forme sous laquelle on cherche chaque vecteur.

II.3.3 Exemple

Soit $E = \mathbb{R}^3$. On munit cet espace du produit scalaire canonique. Transformer $\mathcal{B} =$

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \text{ en une BON.}$$

II.3.4 Exemple

On munit $\mathbb{R}_3[X]$ du produit scalaire $(P|Q) = \int_{-1}^1 P(t)Q(t)dt$. Donner une base orthonormée de $\mathbb{R}_3[X]$ qui soit échelonnée en degré.

II.3.5 Remarque

1. Tout espace euclidien admet une BON.
2. Le procédé de Gram-Schmidt ne change pas une famille orthogonale (sauf à la normaliser si on veut obtenir une BON).

II.3.6 Remarque

Si on orthonormalise \mathcal{B} en \mathcal{B}' , la condition de conservation des espaces vectoriels croissants assure que $P = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$ (la matrice de passage) est triangulaire supérieure.

II.3.7 Corollaire

Dans un espace euclidien on peut compléter toute famille orthogonale de vecteurs non nuls (resp. orthonormale) en une base orthogonale (resp. orthonormale).

Preuve.

Base incomplète + Gram-Schmidt qui ne change pas les familles orthogonales. ■

III Espaces orthogonaux

E est toujours un espace préhilbertien.

III.1 Orthogonal d'un sev

III.1.1 Définition

Deux sous-espaces F, G de E sont dits orthogonaux ssi $\forall (x_F, x_G) \in F \times G (x_F|x_G) = 0$.

On dit que $x \in E$ est orthogonal à F ssi $\forall x_F \in F (x|x_F) = 0$

III.1.2 Exemple

Trouver un exemple dans \mathbb{R}^2 muni du produit scalaire canonique. Preuve avec les bases, avec les équations.

III.1.3 Remarque

Il suffit de vérifier l'orthogonalité deux à deux de familles génératrices (ou de bases) de F et G .

III.1.4 Remarque

En particulier, $x \in E$ est orthogonal à F si $x \perp f_i$ pour tout i où F est engendré par les f_i .

III.1.5 Définition

Soit F un sev de E . L'orthogonal de F est $F^\perp = \{x \in E \mid \forall x_F \in F (x_F | x) = 0\}$. F^\perp est l'ensemble des vecteurs orthogonaux à tous les éléments de F .

III.1.6 Exemple

1. $\{0\}^\perp = E$, $E^\perp = \{0\}$.
2. Calculer l'orthogonal de la droite d'équation $y = x$ dans \mathbb{R}^2 .

III.1.7 Attention

On considère D une droite de l'espace et F un sev de \mathbb{R}^3 . On peut avoir $D \perp F$ sans que $F = D^\perp$. En particulier deux droites peuvent être orthogonales, mais l'orthogonal de D est un plan.

III.1.8 Proposition

Soit F un sev de E .

1. F^\perp est un sous-espace vectoriel de E et la somme $F + F^\perp$ est directe.
2. Si F est de dimension finie alors $F \oplus F^\perp = E$ ie F et F^\perp sont supplémentaires dans E .

Preuve.

1. On a déjà clairement $0 \in F^\perp$, qui est donc non vide. De plus, la linéarité (à gauche par exemple) du produit scalaire nous assure immédiatement que F^\perp est stable par combinaison linéaire.

De plus, si $x \in F \cap F^\perp$ alors $x \perp x$ ie $(x|x) = 0$ et donc $x = 0_E$. Ainsi la somme (d'espaces) est directe.

2. Soit (e_1, \dots, e_p) une base de F que l'on peut supposer orthonormale (quitte à lui appliquer Gram-Schmidt).

Soit $x \in E$.

— Analyse. Supposons que l'on ait $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in F$ et $x_2 \perp F$. Alors pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $(x|e_i) = (x_1|e_i)$ car $(x_2|e_i) = 0$. Ainsi $x_1 = \sum_{i=1}^p (x_1|e_i)e_i = \sum_{i=1}^p (x|e_i)e_i$ (d'après II.2.1, car F est un espace euclidien)

— Synthèse. Posons $x_1 = \sum_{i=1}^p (x|e_i)e_i$ et $x_2 = x - x_1$. Alors par construction, $x_1 \in F$. Montrons que $x_2 \perp F$ ie x_2 est orthogonal à une base de F .

Or, pour $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $(x_2|e_j) = (x|e_j) - (x_1|e_j) = 0$ car

$$(x_1|e_j) = \sum_{i=1}^p (x|e_i) \underbrace{(e_i|e_j)}_{=\delta_{i,j}}.$$

Finalement, la somme directe $F \oplus F^\perp$ contient E donc F et F^\perp sont supplémentaires. ■

III.1.9 Exercice

1. $F \subset G \Rightarrow G^\perp \subset F^\perp$
2. $F^\perp \cap G^\perp = (F + G)^\perp$

III.1.10 En dimension finie

Si E est un espace euclidien (de dimension finie), alors tout sous espace est de dimension finie.

1. $\dim(F) + \dim(F^\perp) = \dim(E)$.
2. La concaténation d'une BON de F et d'une BON de F^\perp est une BON de E .
3. Réciproquement, si (e_1, \dots, e_n) est une BON de E telle que $F = \text{Vect}(e_1, \dots, e_r)$ (indice : on a appliqué Gram-Schmidt à une base de F complétée en une base de E), alors $F^\perp = \text{Vect}(e_{r+1}, \dots, e_n)$.

III.1.11 Exemple

1. Calculer le supplémentaire orthogonal de $D : 2x - y = 0$ (dans \mathbb{R}^2).

2. Dans \mathbb{R}^3 , même question avec $D = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $P : 2x + z = 0$.

III.2 Projections et symétries orthogonales**III.2.1 Définition**

Soit E un espace préhilbertien et F un sous-espace de dimension finie de E .

1. La projection orthogonale sur F est la projection sur F parallèlement à (de direction) F^\perp .
2. La symétrie orthogonale sur F est la symétrie par rapport à F de direction F^\perp .

III.2.2 Remarque

1. On a bien $E = F \oplus F^\perp \dots$
2. On pourra se souvenir de la formule $s = 2p - Id$ pour lier les deux objets précédents.
3. pour $x \in E$, on a les deux conditions géométriques $p_F(x) \in F$ et $x - p_F(x) \in F^\perp$.

III.2.3 Exemple

Matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur $\mathcal{D} : 2x - y = 0$.

III.2.4 Proposition

Soit E un espace préhilbertien et F un sous-espace de dimension finie de E dont une BON est (u_1, \dots, u_r) . On note p_F le projecteur orthogonal sur F . Alors

$$\forall x \in E \quad p_F(x) = \sum_{i=1}^r (x|u_i)u_i$$

En particulier, si $F = \text{Vect}(u)$ est une droite, $p_F(x) = (x|u)u$ où u est de norme 1.

Preuve.

Il s'agit d'un re-formulation de la preuve de III.1.8

III.2.5 Méthode

1. On essaie de déterminer $p_F(x)$ en remarquant que

$$\begin{aligned} p_F(x) &\in F \\ x - p_F(x) &\perp F \end{aligned}$$

donc est orthogonal à une base de F .

2. On utilise la formule $p_F(x) = \sum_{i=1}^r (x|f_i)f_i$ si on connaît une BON de F .

III.2.6 Définition

Une symétrie orthogonale par rapport à une droite est appelée retournement, et une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan est appelé réflexion.

III.2.7 Réduction

Matrice, trace, det dans des bases adaptées.

III.2.8 Exemple

Dans \mathbb{R}^3 on pose : $F = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$. Calculer les matrices dans la base canonique des projection orthogonales sur F et symétrie orthogonales par rapport à F .

III.2.9 Proposition (Inégalité de Bessel)

Soit F un sous-espace de dimension finie de E . On note p_F le projecteur orthogonal sur F .

$$\forall x \in E \quad \|p_F(x)\| \leq \|x\|$$

Preuve.

Soit $x \in E$. On a $x = p_F(x) + (x - p_F(x))$ et donc d'après le théorème de Pythagore, $\|x\|^2 = \|p_F(x)\|^2 + \|x - p_F(x)\|^2$. On conclut en remarquant qu'un carré de réel est toujours positif et que la fonction racine carrée est croissante sur \mathbb{R}^+ . ■

III.2.10 Exercice

Montrer que cette propriété caractérise les projecteurs orthogonaux parmi les projecteurs. Plus précisément, si $p \in \mathcal{L}(E)$ est un projecteur de E on a

$$\forall x \in E \quad \|p(x)\| \leq \|x\| \iff p \text{ est un projecteur orthogonal}$$

Indication : on pourra poser un vecteur non nul x du noyau de p et considérer la projection orthogonale sur $\text{Vect}(x)$.

III.2.11 Théorème (Moindres carrés)

Soit F un sous-espace de dimension finie de E . Pour $x \in E$, on note $d(x, F) = \inf_{y \in F} \|x - y\|$ la distance de x à F .

Il existe un unique $x_0 \in F$ tel que $d(x, F) = d(x, x_0) = \|x - x_0\|$ et donc la borne inférieure est en fait un minimum. x_0 est le projeté orthogonal de x sur F .

Preuve.

Notons $x_0 = p_F(x)$ le projeté orthogonal de x sur F . Alors $x_0 \in F$ et donc $d(x, F) \leq d(x, x_0)$.

De plus, si $y \in F$ alors $x - y = x - x_0 + x_0 - y$ et donc $\|x - y\|^2 = \|x - x_0\|^2 + \|x_0 - y\|^2$ car $\underbrace{x - x_0}_{\in F^\perp} \perp x_0 - y$ et d'après le théorème de Pythagore.

Ainsi pour tout $y \in F$ $d(x, y) \geq d(x, x_0)$ et donc $d(x, F) = d(x, x_0)$. Le calcul précédent montre que ce minimum n'est atteint qu'en x_0 . ■

III.2.12 Remarques

1. Ce théorème donne avant tout l'existence d'un minimum.
2. Avec les notations de la preuve, $d(x, F)^2 = \|x\|^2 - \|p_F(x)\|^2$ (toujours d'après Pythagore). Ainsi, on a un moyen pratique de calculer la valeur de ce minimum, il s'agit de calculer une projection orthogonale.

III.2.13 Traduction dans une BON

Soit (e_1, \dots, e_r) une BON de F

1. Alors $p_F(x) = \sum_{i=1}^r (x|e_i)e_i$.
2. $d(x, F) = \|x\|^2 - \sum_{i=1}^r (x|e_i)^2$.

III.2.14 Exemple

Calculer $\inf_{a,b \in \mathbb{R}} \int_0^1 (e^x - ax - b)^2 dt$. Il s'agit de calculer, dans $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ munit du produit scalaire intégrale, le projeté de l'exponentielle sur le sous espace des fonctions affines (qui est de dimension 2).

IV Automorphismes orthogonaux

Le cadre ici est celui des espaces euclidiens, et plus particulièrement des espaces euclidiens de petites dimension. E sera donc toujours un espace euclidien et on abusera sans retenue du théorème II.2.1 de calcul des coordonnées dans une base orthonormée.

IV.1 Isométries

IV.1.1 Définition-Proposition

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ une application linéaire. On a équivalence entre

1. f conserve le produit scalaire ie $\forall x, y (f(x)|f(y)) = (x|y)$
2. f conserve la norme, ie $\forall x \in E \|f(x)\| = \|x\|$.

Dans ce cas, f est bijective et est appelé automorphisme orthogonal ou encore isométrie vectorielle.

L'ensemble des automorphismes orthogonaux de E est noté $O(E)$.

Preuve.

- $1 \Rightarrow 2$ C'est évident. On pourrait prouver que si f n'est pas forcément linéaire mais conserve le produit scalaire, alors elle est linéaire.
- $2 \Rightarrow 1$ On a pour tous $x, y \in E$

$$\begin{aligned} (f(x)|f(y)) &= \frac{1}{2}(\underbrace{\|f(x) + f(y)\|^2}_{=f(x+y)} - \|f(x)\|^2 - \|f(y)\|^2) \\ &= \frac{1}{2}(\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2) = (x|y) \end{aligned}$$

Comme f conserve la norme, on a $f(x) = 0 \iff \|f(x)\| = 0 \iff \|x\| = 0 \iff x = 0$ donc f est injective donc bijective car E est de dimension finie. ■

IV.1.2 Exemple

1. L'identité est clairement dans $O(E)$.
2. Toute symétrie orthogonale est dans $O(E)$. Le vérifier en revenant à la définition $s(x) = x_F - x_G$ avec $x_F \perp x_G$.
3. Les projections sur tout sous-espace strict ne sont pas des automorphismes (noyau non trivial).

IV.1.3 Valeurs propres

Soit $f \in O(E)$. On suppose que f possède une valeur propre réelle λ .

Alors pour un vecteur propre $x \in E_\lambda \setminus \{0_E\}$, $\|f(x)\| = \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$. Mais $\|f(x)\| = \|x\|$ donc $\lambda = \pm 1$ car $\|x\| \neq 0$.

IV.1.4 Proposition

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors les propositions suivantes sont équivalentes.

1. $f \in O(E)$
2. L'image de toute BON de E par f est une BON de E .
3. L'image d'une certaine BON de E par f est encore une BON de E .

Preuve.

- $1 \Rightarrow 2$ Trivial par conservation du ps

- 2 \Rightarrow 3 ...
- 3 \Rightarrow 1 Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une telle BON et $x, y \in E$ de coordonnées respectives (x_1, \dots, x_n) et (y_1, \dots, y_n) dans \mathcal{B} .

$$\begin{aligned} (f(x)|f(y)) &= \left(\sum_{i=1}^n x_i f(e_i) \middle| \sum_{j=1}^n y_j f(e_j) \right) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} x_i y_j (f(e_i)|f(e_j)) \\ &= \sum_{i=1}^n x_i y_i = (x|y) \end{aligned}$$

d'après II.2.1

IV.1.5 Exemple

Montrer que l'application $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos \theta x - \sin \theta y \\ \sin \theta x + \cos \theta y \end{pmatrix}$ est orthogonale.

IV.1.6 Proposition

La composition de deux isométries est encore une isométrie, et l'inverse (bijection réciproque) d'une isométrie est encore une isométrie.

Preuve.

Rappel : $O(E)$ contient l'identité.

Soit $f \in O(E)$, alors pour tous $x, y \in E$ on a $\underbrace{(f^{-1}(x)|f^{-1}(y))}_u = (f(u)|f(v)) =$

$(x|y)$. La conservation du ps par la composée de deux automorphismes orthogonaux est aussi facile à établir... ■

IV.1.7 Exercice

Dans E euclidien, soit F un sous-espace et $f \in O(E)$. Montrer que $f(F)^\perp = f(F^\perp)$. (inclusion facile + dimension qui est conservée par les iso)

IV.1.8 Proposition

Soit $f \in O(E)$. Si F est un sous-espace de E stable par f (ie $f(F) \subset F$) alors F^\perp est stable par f .

Preuve.

Supposons que F est stable par f et soit $x \in F^\perp$. On doit montrer que $f(x) \in F^\perp$.

Soit donc $y \in F$. Montrons que $(f(x)|y) = 0$. Or $(f(x)|y) = (x|f^{-1}(y))$. De plus, f est bijective donc $f(F) = F$ (égalité des dimensions). Ainsi $f^{-1}(y) \in F$ et donc $(x|f^{-1}(y)) = 0$.

Finalement, $f(x) \in F^\perp$. ■

IV.2 Matrices orthogonales

IV.2.1 Définition

Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$. On dit que M est orthogonale ssi l'endomorphisme canoniquement associé à M est orthogonal. On note $O(n)$ ou $O_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonale de taille n

IV.2.2 Théorème

Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$. Alors les propositions suivantes sont équivalentes :

1. $M \in O_n(\mathbb{R})$.
2. ${}^tMM = I_n$ et $M{}^tM = I_n$.
3. ${}^tM \in O_n(\mathbb{R})$.
4. Les colonnes de M sont une BON de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ pour le produit scalaire canonique.
5. Les lignes de M sont une BON de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ pour le produit scalaire canonique.

Preuve.

1. On commence par prouver 1 \iff 2.

Si $M \in O_n(\mathbb{R})$ on a alors

$$\forall X, Y \in M_{n,1}(\mathbb{R}) (MX|MY) = (X|Y) = {}^tX{}^tMMY = {}^tXY$$

Appliquons ceci à (E_1, \dots, E_n) la base canonique de \mathbb{R}^n .

On note $A = {}^tMM$. Alors AE_i est la i ème colonne de A et $(E_j|C)$ est la j ème coordonnée de C donc tE_jAE_i est exactement a_{ij} . Donc $a_{ij} = \delta_{i,j}$ pour tous i et j et finalement $A = I_n$

Maintenant qu'on a ${}^tMM = I_n$ il suffit de transposer pour trouver $M{}^tM = I_n$.

Réciproquement si ${}^tMM = I_n$ alors on a clairement $(MX|MY) = (X|Y)$ pour tous X, Y et donc l'alca à M est orthogonale.

2. $M \in O_n(\mathbb{R}) \iff {}^tMM = I_n \iff M{}^tM = I_n \iff {}^tM \in O_n(\mathbb{R})$.

3. L'image par un auto orthogonal d'une BON est une BON, donc les colonnes de M qui sont l'image de la base canonique forment une BON.

4. Passage à la transposée. ■

IV.2.3 Exemple

1. I_n , $A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$. Calculer A^{-1} .

2. $\frac{1}{7} \begin{pmatrix} 6 & 3 & -2 \\ -2 & 6 & 3 \\ 3 & -2 & 6 \end{pmatrix}$

3. Quelle est la méthode la plus efficace pour vérifier qu'une matrices est orthogonale ?

IV.2.4 Proposition

Soit E un espace euclidien, soit \mathcal{B} une **base orthonormée** de E et \mathcal{B}' une base de E . On note $P = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$ la matrice de passage de \mathcal{B} à \mathcal{B}' .

Alors \mathcal{B}' est une BON ssi $P \in O_n(\mathbb{R})$.

Preuve.

On sait qu'on peut utiliser l'expression du ps canonique de \mathbb{R}^n a condition de se placer dans une BON de E et c'est ici le cas. Voir II.2.1 ■

IV.2.5 Exemple

Soit E un espace euclidien de dimension 2, et $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ une base orthonormale. Montrer que $\mathcal{B}' = (f_1, f_2)$ avec $f_1 = \frac{4e_1+3e_2}{5}$ et $f_2 = \frac{-3e_1+4e_2}{5}$ est une BON de E .

IV.2.6 Changement de bases orthonormales

Soit E un eve de $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ deux BON de E . On note $P = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$.

1. $P^{-1} = {}^tP = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B})$.

2. Soit $x \in E$ et X le vecteur de ses coordonnées dans \mathcal{B} , X' ses coordonnées dans \mathcal{B}' .
On a $X = PX'$ et $X' = {}^tPX$.

3. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, $M = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ et $M' = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$. Alors $M' = {}^tPMP$.

IV.2.7 Exemple

Dans \mathbb{R}^2 on passe de la base canonique à la base u_θ, v_θ . Donner les changements de coordonnées.

IV.2.8 Proposition

L'inverse d'une matrice orthogonale est orthogonale et le produit de deux matrices orthogonales est orthogonale.

Preuve.

Si $A \in O_n(\mathbb{R})$ alors ${}^tA = A^{-1} \in O_n(\mathbb{R})$. Si on a également $B \in O_n(\mathbb{R})$ alors $AB({}^tAB) = AB({}^tB{}^tA) = AI_n{}^tA = I_n$ de donc AB est orthogonale. ■

IV.2.9 Interprétation géométrique

Si $M \in O_n(\mathbb{R})$ alors M est la matrice d'une BON dans la base canonique qui est orthonormale. Ainsi M^{-1} est la matrice de la base canonique dans une BON et est donc une matrice orthogonale.

IV.2.10 Proposition

Soit E un espace euclidien.

1. Soit \mathcal{B} une BON de E et $f \in O(E)$. Alors $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est orthogonale.
2. Réciproquement si $A \in O_n(\mathbb{R})$ et \mathcal{B} est une BON quelconque de E alors l'endomorphisme f tel que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = A$ est orthogonal.

Preuve.

1. Notons $M = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$. On doit montrer que $M \in O_n(\mathbb{R})$.

Soient $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$. on note C_i, C_j les colonnes de M correspondantes et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$. Alors $(C_i|C_j) = (\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f(e_i))|\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f(e_j))) = (f(e_i)|f(e_j)) = (e_i|e_j) = \delta_{i,j}$ d'après II.2.1 et car f est une isométrie. On utilise deux fois le fait que \mathcal{B} est orthonormée.

2. Avec les mêmes notations, $(f(e_i)|f(e_j)) = (C_i|C_j) = \delta_{i,j}$ d'après IV.2.2. ■

Explication A condition de se placer dans une BON, on peut passer des endomorphismes orthogonaux aux matrices orthogonales.

IV.2.11 Proposition

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et \mathcal{B} une base **orthonormée** de E . On note $M = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.

M est symétrique et $f \in O(E) \iff f$ est une symétrie orthogonale

Preuve.

Si M est symétrique on a à la fois ${}^tM = M$ et ${}^tM = M^{-1}$. Ainsi f est une symétrie. Montrons que $\ker(f - Id_E) \perp \ker(f + Id_E)$. Soient $x_1, x_2 \in E \setminus \{0_E\}$ tels que $f(x_1) = x_1$ et $f(x_2) = -x_2$ (des vecteurs propres). Montrons que $x_1 \perp x_2$. Or f est une isométrie, donc $(x_1|x_2) = (f(x_1)|f(x_2)) = (x_1|-x_2) = -(x_1|x_2)$ et donc $(x_1|x_2) = 0$. Finalement la symétrie f est bien orthogonale.

Réciproquement, supposons que f est une symétrie orthogonale. Alors $M = M^{-1}$. De plus, M est une matrice orthogonale d'après la proposition précédente, donc $M^{-1} = {}^tM$. ■

IV.2.12 Matrices symétriques

Si $M \in O_n(\mathbb{R})$ est symétrique, alors c'est la matrice canoniquement associée à une symétrie orthogonale.

IV.2.13 Théorème

Soit $f \in O(E)$ et $M \in O_n(\mathbb{R})$. Alors $\det(f) = \pm 1$, $\det(M) = \pm 1$

Preuve.

Il suffit de le prouver pour M , car la matrice de f dans une BON de E est une matrice orthogonale.

Or $\det(M) = \det({}^tM)$ et ${}^tM = M^{-1}$. Ainsi $\det(M) = \frac{1}{\det(M)}$ et finalement $\det(M) = \pm 1$ ■

IV.2.14 Définition

1. L'ensemble des isométries de E de déterminant 1 est noté $SO(E)$ et appelé groupe spécial orthogonal de E . $f \in SO(E)$ est dite positive (et si $\det(f) = -1$, on dira que f est une isométrie négative)
2. $SO_n(\mathbb{R})$ (aussi noté $SO(n)$) est l'ensemble $\{M \in O(n) \mid \det(M) = 1\}$.

IV.2.15 Exercice

Montrer que $SO(n)$ est stable par produit et passage à l'inverse.

IV.2.16 Définition

Soit \mathcal{B} une base de \mathbb{R}^n . On dit que cette base est directe ssi son déterminant dans la base canonique est strictement positif (c'est à dire vaut 1 dans le cas d'une base orthonormée). On dit qu'elle est indirecte sinon.

IV.2.17 Proposition

Effectuer un changement de base entre deux bases orthonormées directes ne modifie pas les déterminants (des familles ni des applications linéaires).

On retrouve ici la notion de produit mixte vu en géométrie de 1ère année. On peut calculer le déterminant d'une famille dans n'importe quelle base orthonormée directe.

Preuve.

SI M est la matrice d'une famille dans une première BOND, la matrice dans la nouvelle BOND est $M' = PM$. Comme $\det(P) = 1$, $\det(M') = \det(M)$. ■

V Matrices symétriques réelles

V.1 Lien avec le produit scalaire

Rappel : Pour $X, Y \in \mathbb{R}^n$, le produit scalaire canonique peut se calculer par $(X|Y) = {}^tXY$.

V.1.1 Définition

Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite symétrique ssi ${}^tA = A$. L'ensemble des matrices symétriques de taille n est noté $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. C'est un espace vectoriel de dimension $\frac{n(n+1)}{2}$.

V.1.2 Exemple

Rappel : le produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est $(A|B) = \text{tr}({}^tAB)$. Montrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \perp \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ (en semble des matrices antisymétriques).

On peut ainsi interpréter la transposition comme la symétrie orthogonale par rapport à $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

V.1.3 Exercice

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $P \in O_n(\mathbb{R})$. Montrer que A est symétrique ssi tPAP est symétrique.

V.1.4 Proposition

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ ssi pour tous $X, Y \in \mathbb{R}^n$, $(AX|Y) = (X|AY)$ (pour le produit scalaire canonique).

Preuve.

1. Si A est symétrique, alors $(AX|Y) = {}^t(AX)Y = {}^tX{}^tAY = {}^tXAY = (X|AY)$ pour tout $(X, Y) \in (\mathbb{R}^n)^2$.
2. Réciproquement, supposons que pour tous $X, Y \in \mathbb{R}^n$, $(AX|Y) = (X|AY)$ ie ${}^tX{}^tAY = {}^tXAY$ Montrons que ${}^tA = A$.

On a, pour tout X, Y , ${}^tX({}^tA - A)Y = 0$ ou encore $(X|({}^tA - A)Y) = 0$. Ainsi, pour Y fixé, $({}^tA - A)Y$ est orthogonal à tout vecteur de \mathbb{R}^n donc est nul. On a donc $\forall Y \in \mathbb{R}^n$ $({}^tA - A)Y = 0$ et donc $({}^tA - A)$ est d'image nulle. C'est la matrice nulle.

On a prouvé de manière plus générale que $(X|AY) = ({}^tAX|Y)$ et $(AX|Y) = (X|{}^tAY)$. ■

V.1.5 Théorème

Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

1. Les valeurs propres de A sont réelles.
2. Si X_1, X_2 sont des vecteurs propres associés à deux valeurs propres distinctes, alors $X_1 \perp X_2$. Autrement dit, les sous espaces propres de A sont orthogonaux deux à deux.

Preuve.

1. Hors programme. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de A (c'est possible dès que

$n \geq 1$ d'après le théorème de d'Alembert-Gauss). Soit $X = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$ un vecteur

propre associé. Alors $AX = \lambda X$.

Alors $A\bar{X} = \bar{\lambda}\bar{X}$ car A est à coefficients réels (reprendre la formule de produit matriciel, et conjuguer chaque terme). On a alors ${}^t(AX)\bar{X} = \lambda X\bar{X} = \lambda \sum_{i=1}^n |z_i|^2$. De plus, ${}^t(AX)\bar{X} = {}^tX A\bar{X} = \bar{\lambda}{}^tX\bar{X} = \bar{\lambda} \sum_{i=1}^n |z_i|^2$.

Comme $\sum_{i=1}^n |z_i|^2 > 0$ on a bien $\bar{\lambda} = \lambda$.

2. Calculons $(AX_1|X_2)$ de deux manières. On a d'une part $(AX_1|X_2) = \lambda_1(X_1|X_2)$ et d'autre part $(AX_1|X_2) = (X_1|AX_2) = \lambda_2(X_1|X_2)$. Ainsi $(\lambda_1 - \lambda_2)(X_1|X_2) = 0$ et comme $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $(X_1|X_2) = 0$. ■

V.2 Théorème spectral**V.2.1 Théorème**

Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique réelle. Alors A est diagonalisable (dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$) dans une base orthonormée, c'est à dire qu'il existe une matrice diagonale D et une matrice **orthogonale** P telles que $A = PDP^{-1} = PD^tP$.

Preuve.

Hors programme.

Le polynôme χ_A est scindé sur \mathbb{R} car les valeurs propres de A sont réelles. Notons T une matrice triangulaire supérieure semblable à A via la matrice de passage P : $T = P^{-1}AP$. Toutes les matrices sont à coefficients réels.

On applique le procédé de Gram-Schmidt à la base \mathcal{B} des colonnes de P pour obtenir une famille orthonormale \mathcal{B}' de matrice O dans la base canonique. Alors $\text{Mat}_{\mathcal{B}_c}(\mathcal{B}) = P = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \text{Mat}_{\mathcal{B}_c}(\mathcal{B}') = \Delta O$ où Δ est triangulaire supérieure et O orthogonale.

On obtient $T = \Delta^{-1}O^{-1}AO\Delta$ ie $\Delta T\Delta^{-1} = {}^tOAO$ est à la fois une matrice symétrique et triangulaire supérieure. Elle est donc diagonale et A est semblable à une matrice diagonale!

V.2.2 Remarque

Si A est symétrique et f est son endomorphisme canoniquement associé, il existe une BON dans laquelle la matrice de f est diagonale.

V.2.3 Exemple

Montrer que $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ est diagonalisable et la diagonaliser.

V.2.4 Exemple

Diagonaliser dans une BON la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et donner l'interprétation géométrique de la matrice de passage.