Devoir surveillé n°4

Durée : 4H. Calculatrices interdites. **Les candidats sont invités à porter une attention particulière à la rédaction et la propreté : les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.**

Lisez l'énoncé attentivement et en entier **AVANT** de commencer chaque exercice.

Exercice 1 (Questions de cours)

1. Justifier que les intégrales suivantes sont convergentes

   (a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{\sin(t)}}\mathrm{d}t$

   (b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^4+t^2+1}{\operatorname{ch} t}\mathrm{d}t$

   (c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t}}\mathrm{d}t$

   (d) $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t$ pour tout $x>0$

2. On considère la courbe paramétrée définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $\begin{cases} x(t) = t^2+\frac{2}{t} \\ y(t) = \frac{1}{t^2}+2t \end{cases}$. On note $M(t)$ le point de paramètre t.

   (a) En considérant le point $M(\frac{1}{t})$, montrer que l'on peut l'étudier sur $]0,1]$ en précisant la symétrie à effectuer pour obtenir le tracé complet.

   (b) Donner un vecteur directeur puis une équation de la tangente au point de paramètre $t=\frac{1}{2}$.

3. La matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -3 \\ 3 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

Exercice 2

1. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie d, et f un endomorphisme de E. $\ker f$ désigne le noyau de f, et $\operatorname{Im} f$ son image. On note $f^2 = f\circ f$. Enfin, id_E est l'endomorphisme identité de E. λ désigne un réel.

   (a) Démontrer que :
   $$\ker(f-\lambda id_E) \subset \ker(f^2-\lambda^2 id_E)$$
   Quel lien peut-on en déduire entre les valeurs propres de f et celles de f^2 .

   (b) Démontrer que si $\ker f\cap \operatorname{Im} f \neq \{0\}$, alors
   $$\dim(\ker f^2) \geqslant \dim(\ker f)+1$$

   (c) On désigne par P_f et P_{f^2} les polynômes caractéristiques respectifs de f et f^2. Démontrer que
   $$P_{f^2}(X^2) = (-1)^d P_f(X)P_f(-X)$$

2. Dans cette question, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 3, E est l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ des polynômes à coefficients réels de degrés au plus n.
   Soit f l'application définie, pour tout polynôme P de E, par :
   $$f(P) = (X^2-X+1)P(-1)+(X^3-X)P(0)+(X^3+X^2+1)P(1)$$

   (a) Démontrer que f est un endomorphisme de E.

   (b) Déterminer $\ker f$ et $\operatorname{Im} f$. Préciser leurs dimensions.

   (c) f est-il injectif ? Surjectif ?

   (d) Justifier que 0 est valeur propre de f. Que dire de sa multiplicité [1] ?

   (e) Démontrer que les polynômes $Q_1 = 3X^3+4X^2-3X+4$ et $Q_2 = X^3+X$ sont des vecteurs propres de f. Quelles sont les valeurs propres associées ?

   (f) A-t-on $\ker f\oplus \operatorname{Im} f = E$?

   (g) Quelles sont les valeurs propres de f^2 ? En déduire que f^2 est diagonalisable.

   (h) f est-il trigonalisable ? Diagonalisable ? Préciser les valeurs propres et les sous-espaces propres de f.

1. en tant que racine de P_f

Exercice 3
Partie I

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose
$$W_n = \int_0^1 \frac{u^n}{\sqrt{1-u^2}}\mathrm{d}u.$$

1. Montrer que l'intégrale définissant W_0 est convergente et la calculer.
2. Donner une primitive, sur un intervalle à préciser, de la fonction $t \mapsto \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}$, montrer que W_1 est défini par une intégrale convergente et que $W_1 = 1$
3. Montrer que l'intégrale définissant W_n est convergente.
4. Montrer que $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante et positive. Qu'en déduire ?
5. Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}$, on a
$$W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}W_n$$
6. Déduire des questions précédentes que $W_n \underset{n\to+\infty}{\sim} W_{n+1}$
7. Montrer que $((n+1)W_nW_{n+1})$ est une suite constante.
8. Montrer que
$$W_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$$
9. Montrer que $W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\mathrm{d}t$.

Partie II

L'objectif de cette partie est d'établir la convergence et de calculer la valeur de l'intégral de Gauss $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t$.

1. Montrer que pour tout réel x de $]-1,+\infty[$: $\ln(1+x) \leqslant x$.
2. En déduire que, pour tout entier naturel non nul n, et tout réel t de $]0,\sqrt{n}[$:
$$\ln\left(1-\frac{t^2}{n}\right) \leqslant -\frac{t^2}{n} \text{ et } \ln\left(1+\frac{t^2}{n}\right) \leqslant \frac{t^2}{n}$$
3. Montrer que, pour n entier naturel non nul, $\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-n}\mathrm{d}t$ est une intégrale convergente.
4. Montrer que, pour tout entier naturel non nul n :
$$\int_0^{\sqrt{n}}\left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2}\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{\sqrt{n}}\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-n}\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{+\infty}\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-n}\mathrm{d}t$$
5. Soit n un entier naturel non nul.
   (a) Pour tout réel x de $\mathbb{R}\backslash\pi\mathbb{Z}$, on pose $\operatorname{cotan} x = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$.
   Montrer que cotan réalise une bijection de $]0,\pi[$ dans $\mathbb{R}$
   (b) En effectuant le changement de variable $t = \sqrt{n}\operatorname{cotan}(u)$, montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-n}\mathrm{d}t$ peut s'exprimer en fonction de W_{2n-2} (voir la partie I).
   (c) Montrer que $\displaystyle\int_0^{\sqrt{n}}\left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n\mathrm{d}t$ peut s'exprimer en fonction de W_{2n+1}.
   (d) Déduire des résultats précédents que :
$$\sqrt{n}W_{2n+1} \leqslant \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2}\mathrm{d}t \leqslant \sqrt{n}W_{2n-2}$$
6. En utilisant l'équivalent obtenu en partie I, donner la valeurs des intégrales
$$I = \int_0^{+\infty} e^{-t^2},\ J = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t, \text{ et } K = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t$$