Epreuve de Mathématiques C

Durée 4 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

À rendre en fin d'épreuve avec la copie une feuille de papier millimétré

Il est interdit aux candidats de signer leur composition ou d'y mettre un signe quelconque pouvant indiquer sa provenance.

Partie I

Soit n un entier naturel non nul. On considère les fonctions f_n et g_n définies, pour tout réel x, par :

$$f_n(x) = e^{\frac{x^2}{n}} - \frac{x^2}{n} - 1 \quad \text{et} \quad g_n(x) = e^{-\frac{x^2}{n}} + \frac{x^2}{n} - 1$$

1. Etudier la parité de f_n et g_n. En déduire un domaine d'étude de ces fonctions.
2. On souhaite ici tracer les courbes représentatives des fonctions f_1 et g_1 sur un même graphe.
   (a) Pour $x \in \mathbb{R}$, exprimer $f_1(x) - g_1(x)$ à l'aide de la fonction sinus hyperbolique.
   (b) Montrer que pour tout réel $t \geq 0$:
   $$\mathrm{sh}(t) \geq t.$$
   En déduire que $f_1(x) \geq g_1(x)$ pour tout $x \geq 0$.
   (c) A l'aide de ces éléments, représenter sur un même graphe les courbes représentatives respectives des fonctions f_1 et g_1 sur $[0, 1]$ dans un repère orthonormé direct. On prendra comme unité 10 cm.
3. On suppose $n \geq 2$.
   (a) Calculer, pour tout réel x, $f_n'(x)$ et $g_n'(x)$.
   (b) Etudier les variations de f_n et g_n sur $\mathbb{R}^+$.
   (c) Montrer que, pour tout réel positif x : $f_n(x) \geq 0$ et $g_n(x) \geq 0$.
   (d) En déduire, pour tout réel x de l'intervalle $[0, \sqrt{n}]$:
   $$\left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n \leq e^{-x^2} \leq \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n}$$
   L'inégalité de droite est-elle encore vraie sur $\mathbb{R}^+$?
   (e) Dans cette question, on suppose x fixé dans $\mathbb{R}^+$. Déterminer :
   $$\lim_{n \to +\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n \quad \text{et} \quad \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n}$$
4. (a) Montrer que pour tout réel positif x :
   $$\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n} \leq \frac{1}{1 + x^2}.$$
   (b) Montrer la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1 + x^2}$ et calculer sa valeur.
   (c) En déduire la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$ ainsi que la majoration
   $$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \leq \frac{\pi}{2}.$$

Partie II

Pour tout réel $t \geq 0$, on pose :

$$h(t) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t\,x^2}}{1+x^2}\,dx$$

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$$

1. Montrer que h est définie et continue sur $\mathbb{R}^+$.
2. Que vaut $h(0)$?
3. (a) Soit a un réel strictement positif. Montrer que h est dérivable sur $[a, +\infty[$.
   (b) Montrer que h est dérivable sur $]0, +\infty[$.
4. Etudier les variations de h sur $\mathbb{R}^+$, et en déduire que, pour tout réel positif t :

$$0 \leq h(t) \leq \frac{\pi}{2}$$

5. Montrer que h vérifie, pour $t > 0$, l'équation différentielle $(\mathcal{E})$

$$h'(t) - h(t) = -\frac{I}{\sqrt{t}}.$$

6. (a) Donner la solution générale, sur $\mathbb{R}_+^\star$, de l'équation homogène $(\mathcal{E}_0)$ associée à $(\mathcal{E})$.
   (b) Soit $t_0 > 0$. A l'aide d'une intégrale, exprimer la primitive s'annulant en t_0 de la fonction qui, à tout réel $t > 0$, associe $\dfrac{e^{-t}}{\sqrt{t}}$.
   (c) Soit $t_0 > 0$. Montrer qu'il existe un réel k tel que, pour tout $t > 0$,

$$h(t) = \left(k - I \int_{t_0}^{t} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\,du\right) e^t \qquad (\star)$$

7. (a) Montrer que pour tout $t > 0$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^t \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\,du$ est convergente, et que

$$\int_0^t \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\,du = 2\int_0^{\sqrt{t}} e^{-x^2}\,dx.$$

   (b) En faisant tendre t vers 0 dans $(\star)$, donner une expression de k à l'aide d'une intégrale, et en déduire que pour tout $t \geq 0$

$$h(t) = \left(\frac{\pi}{2} - 2\,I \int_0^{\sqrt{t}} e^{-x^2} dx\right) e^t.$$

8. Montrer que, pour tout réel positif t :

$$0 \leq \frac{\pi}{2} - 2\,I \int_0^{\sqrt{t}} e^{-x^2}\,dx \leq \frac{\pi}{2}\,e^{-t}.$$

9. En déduire la valeur de I.

Partie III

1. Etudier la convergence de la série de terme général $\dfrac{(-1)^n}{n\,!\,(2n+1)}$.
2. Montrer que la fonction qui, à tout réel t, associe e^{-t^2}, est développable en série entière sur un domaine $\mathcal{D}$ que l'on précisera, et donner ce développement.
3. Montrer que :

$$\int_0^1 e^{-t^2}\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n\,!\,(2n+1)}$$

4. Pour tout entier naturel n, on pose $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k\,!\,(2k+1)}$. On admet le résultat suivant :

$$|R_n| \leq \frac{1}{(n+1)\,!\,(2\,n+3)}$$

   (a) Proposer, uniquement avec les données fournies par le problème, une méthode permettant de déterminer une valeur numérique approchée de $\displaystyle\int_0^1 e^{-t^2}\,dt$ avec une précision $\varepsilon > 0$ donnée.

   (b) Donner un nombre rationnel r qui soit une valeur numérique approchée de $\displaystyle\int_0^1 e^{-t^2}\,dt$ à 10^{-3} près (r pourra être laissé sous forme de somme de fractions : il n'est pas demandé d'exprimer r sous forme de fraction irréductible ni d'en donner une valeur numérique approchée).

On étudie, dans ce problème, diverses propriétés des fonctions gaussiennes, dont un exemple bien connu est la densité de probabilité de la loi normale

$$x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{\sigma\sqrt{2\,\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

où μ est l'espérance mathématique, et σ l'écart-type.

Ces fonctions sont très utilisées, notamment, en physique statistique. Ainsi, en théorie cinétique des gaz, la loi de distribution de vitesses de Maxwell, qui est gaussienne, permet de quantifier la répartition des molécules entre les différentes vitesses dans un gaz en équilibre thermodynamique global, à température uniforme.