I Fonctions puissances entières

I.1 Propriétés

Définition 1
Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$.

- *si $n > 0$ alors $x^n = \underbrace{x \times \cdots \times x}_{n \text{ fois}} = \prod_{k=1}^{n} x$.*
- *si $n = 0$ et $x \neq 0$ alors $x^n = 1$ (y compris $0^0 = 1$ par convention)*
- *si $n < 0$ et $x \neq 0$ alors $x^n = \left(\frac{1}{x}\right)^{-n}$.*

On a toujours $1^n = 1$, et ce pour tout n.

Proposition 1
Soit $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$.

1. *La fonction $f_n : x \mapsto x^n$ qui est définie sur $\mathbb{R}$ si $n \geqslant 0$ et sur $\mathbb{R}^*$ si $n < 0$, est $\mathcal{C}^1$ sur son ensemble de définition et sa dérivée est $nf_{n-1} : x \mapsto nx^{n-1}$. f_n possède la même parié que n.*
2. *Soient $x, y \in \mathbb{R}^*$.*

$$x^{m+n} = x^m x^n, \; x^{mn} = (x^m)^n,$$

$$(xy)^n = x^n y^n, \; x^{-n} = \left(\frac{1}{x}\right)^n = \frac{1}{x^n}$$

I.2 Positions relatives

Proposition 2
Soient m et n deux entiers relatifs, $m < n$.

- *Sur $]0, 1[$, $f_m > f_n$.*
- *Sur $]1, +\infty[$, $f_n > f_m$*
- *Les positions relatives sur $]-\infty, 0[$ dépendent des parités de m et n (disinguer les cas), mais on peut toujours comparer les valeurs absolues. Sur $]-1, 0[$, $|f_n| < |f_m|$ et sur $]-\infty, -1[$, $|f_m| < |f_n|$.*

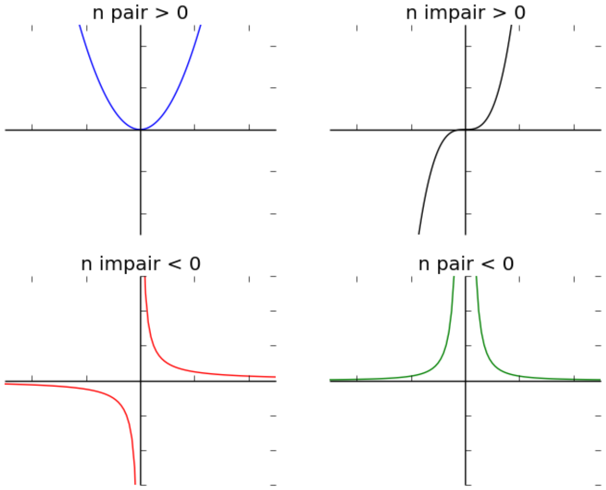
I.2.1 Limites usuelles

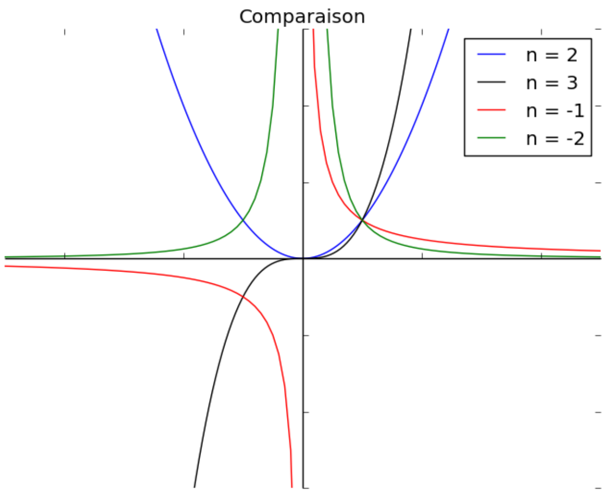
Soit $n \in \mathbb{N}$ et $n > 0$.

$$\lim_{+\infty} x^n = +\infty, \; \lim_{+\infty} \frac{1}{x} = 0^+, \; \lim_{-\infty} \frac{1}{x} = 0^-, \; \lim_{0^-} \frac{1}{x} = -\infty, \; \lim_{0^+} \frac{1}{x} = +\infty.$$

Pour déterminer les limites de $x \mapsto \frac{1}{x^n}$ on utilise le théorème de composition. Il faut prêter particulièrement attention à la parité de n.

I.2.2 Figures





I.3 Réciproques et racines

Proposition 3
Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$. La fonction $f_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ est strictement monotone, et surjective (d'après le théorème des valeurs intermédiaires) et est donc une bijection. Sa réciproque est notée sous la forme $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto & \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}} \end{array} \right.$.

I.4 Fonctions polynomiales

Définition 2
Une fonction polynomiale *est une fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui à x associe $\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, où les $a_i \in \mathbb{R}$ et $a_n \neq 0$ (au moins dans le cas $n > 0$). Une* fonction rationnelle *est un quotient de fonctions polynomiales, définie sur $\mathbb{R}$ privé des zéros du dénominateur.*

Proposition 4
Considérons $f : x \mapsto \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ une fonctions polynomiale non nulle (ie. $a_n \neq 0$). f a les mêmes limites en $\pm\infty$ que $a_n x^n$. Nous le prouverons dans la suite du chapitre.

II Fonctions puissance réelle

II.1 Puissances réelles

Définition 3
Soient $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $y \in \mathbb{R}$. On pose

$$x^y = e^{y \ln(x)}$$

Proposition 5
Soient $a, b \in \mathbb{R}_+^*$, x et y des réels.

1. $a^{x+y} = a^x a^y$
2. $a^{xy} = (a^x)^y$
3. $a^{-x} = \left(\frac{1}{a}\right)^x = \frac{1}{a^x}$
4. $(ab)^x = a^x b^x$

On en déduit la règle pour les quotients : $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$.

II.2 Fonctions puissances

Définition 4
Soit $\alpha \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Z}$. La fonction puissance α est définie par

$$f_\alpha : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R}_+^* \\ x & \mapsto & x^\alpha = e^{\alpha \ln x} \end{array} \right.$$

Si $\alpha > 0$, on pose en plus $f_\alpha(0) = 0$. On a déjà défini $f_0(0) = 1$ pour les fonctions puissance entières.

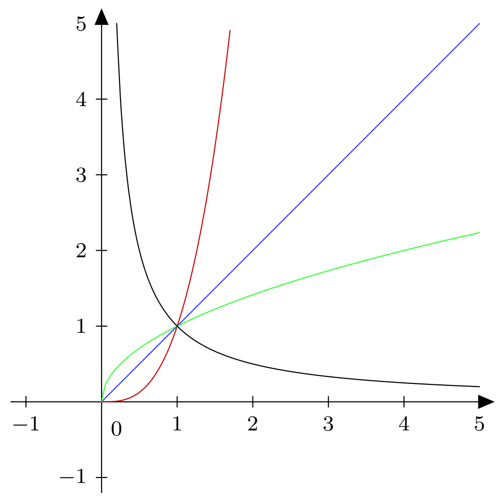
Proposition 6
Soit $\alpha \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Z}$

— *f_α réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ vers $\mathbb{R}_+^*$, $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Sa dérivée est $x \mapsto \alpha x^{\alpha-1}$. Sa fonction réciproque est $f_{\frac{1}{\alpha}}$.*

— *Encore une fois les positions relatives dépendent de la position par rapport à 1. On considère $\alpha > \beta$ avec β un réel non entier.*

$$\forall x \in]0, 1[\; x^\alpha < x^\beta.$$

$$\forall x \in]1, +\infty[\; x^\alpha > x^\beta.$$



III Comparaison de fonctions

III.1 Notations

Définition 5
Soit I un intervalle de bornes a et b (éventuellement infinies, avec $a \leqslant b$). On note $\overline{I}$ l'ensemble $I \cup \{a, b\}$. Ce n'est pas un intervalle dans le cas où $a = -\infty$ ou $b = +\infty$

Définition 6
Soit I un intervalle, $a \in \overline{I}$ et $f, g : I \to \mathbb{R}$

1. *On dit que $f \underset{a}{\sim} g$ ssi $\frac{f}{g} \underset{a}{\to} 1$ et $\frac{g}{f} \underset{a}{\to} 1$. ($f$ et g sont équivalentes en a)*
   Cette définition n'a du sens que lorsque le calcul de ces limites en a un.
2. *On dit que $f = o_a(g)$ ssi $\frac{f}{g} \underset{a}{\to} 0$. ($f$ est négligeable devant g en a) On a alors $f = g \times \varepsilon$ avec $\varepsilon(x) \underset{x \to a}{\to} 1$.*

En particulier les fonctions f et g ne sont pas la fonction nulle.

Proposition 7
Avec les notations précédentes, on a $f \underset{a}{\sim} g \iff f \underset{a}{=} g + o(g) \iff g \underset{a}{=} f + o(f)$.

Théorème 1
Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ et $a \in \overline{I}$. On suppose de plus que $f \underset{a}{\sim} g$.

1. *f admet une limite en a ssi g admet une limite en a et dans ce cas les limites sont égales.*
2. *f et g ont même signe "au voisinage de a".*

Proposition 8
Soient $f_1, g_1, f_2, g_2 I \to \mathbb{R}$ des fonctions et $a \in \overline{I}$.

1. *Si $f_1 \underset{a}{\sim} g_1$ et $f_2 \underset{a}{\sim} g_2$ alors $f_1 f_2 \underset{a}{\sim} g_1 g_2$, $\frac{f_1}{f_2} \underset{a}{\sim} \frac{g_1}{g_2}$.*
   Si $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f_1 > 0$ alors $f_1^\alpha \underset{a}{\sim} f_2^\alpha$ On peut faire directement des produits et des quotients d'équivalents.
2. *Si $\lambda \in \mathbb{R}^*$ alors $o_a(\lambda) = o_a(1)$. On peut supprimer ou ajouter des constantes dans un petit o.*
3. *$f_1 o_a(g_1) = o_a(f_1 g_1) = f_1 g_1 o_a(1)$ et $o_a(f_1) o_a(g_1) = o_a(f_1 g_1)$. Compatibilité avec la muliplication.*
4. *$o_a(f_1) \pm o_a(f_1) = o_a(f_1)$. Attention au cas -*
5. *Si $f_1 \underset{a}{=} o(g_1)$ alors $o(f_1) \underset{a}{=} o(g_1)$. Tradution : si f_2 est négligeable devant f_1 et f_1 négligeable devant g_1 alors f_2 est négligeable devant g_1.*
6. *Si $f_1 \underset{a}{\sim} g_1$ alors $o_a(f_1) = o_a(g_1)$. On peut remplacer une fonction par son équivalent dans un petit o.*

III.2 Comparaisons et tangentes

Théorème 2
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I et $a \in I$.
Si f est dérivable en a alors $f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + o_a(x - a)$. Réciproquement, si $f(x) = f(a) + \alpha(x - a) + o_a(x - a)$ alors f est dérivable en a et $f'(a) = \alpha$.

III.3 Croissances comparées

Proposition 9
Soient $\alpha, \beta > 0$ des réels.

1. $(\ln(x))^\alpha \underset{+\infty}{=} o(x^\beta)$
2. $x^\alpha \underset{+\infty}{=} o\left((e^x)^\beta\right)$
3. $|\ln(x)|^\alpha \underset{0}{=} o(x^{-\beta})$.