Devoir maison n°5

A rendre le 24/01. Vous pouvez rendre une copie pour 2, à condition de chercher ensemble et que chacun rédige une partie du devoir.

Exercice 1
Dans $\mathbb{R}^2$ (le plan rapporté au repère orthonormé direct $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$), on considère $\Omega = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$.

1. Soit N un point du cercle de centre Ω et de rayon 1. Déterminer, quand il existe, l'orthocentre du triangle $(O\Omega N)$.
   Rappel : il s'agit du point d'intersection des hauteurs.
   On exprimera d'abord les coordonnées de N en fonction d'un angle $t \in [-\pi,\pi]$, en précisant pour quels valeurs de t l'orthocentre est bien défini.
2. On note Γ le lieu de ces orthocentres. Nous avons obtenu une première paramétrisation de Γ à la question précédente (c'est à dire une expression de Γ comme support d'une courbe paramétrée).
   (a) Pour $t \in]-\pi,\pi[$, on pose $u = \tan\frac{t}{2}$. Montrer que $\cos(t) = \frac{1-u^2}{1+u^2}$ et $\sin(t) = \frac{2u}{1+u^2}$.
   (b) Montrer que l'on peut paramétrer Γ par $x(u) = \frac{2}{u^2+1}$ et $y(u) = \frac{u^2-1}{u(u^2+1)}$.
   Il s'agit de montrer que $M : \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, un point du plan, vérifie $M \in \Gamma \iff \exists u \in \dots\ x = x(u)$ et $y = y(u)$.
3. Etudier la courbe Γ sous la forme précédente, puis tracer.