Exercice 1
On considère dans cet exercice des dés à 6 faces parfaitement équilibrés.

1. Montrer que la probabilité d'obtenir au moins un 6 en lançant 4 dés est supérieurs à $\frac{1}{2}$.
2. Montrer que la probabilité d'obtenir un double 6 en lançant 24 fois 2 dés est inférieure à $\frac{1}{2}$.

Exercice 2
Dans une usine deux machines fabriquent le même objet. La première a une probabilité p_1 de fabriquer un objet défectueux, la seconde une probabilité p_2.

On choisit une caisse au hasard d'objets fabriqués avec une même machine. Le premier objet testé est totalement fonctionnel. Quelle est la probabilité pour que le second objet testé le soit également ?

Exercice 3
On souhaite tester le sang de N personnes à la recherche d'un virus dont on sait qu'il affecte une personne avec une probabilité $p \in]0,1[$, indépendamment des autres. Pour réaliser ces tests on à la choix entre deux protocoles :

— Méthode 1 : on teste tous les échantillons un par un.

— Méthode 2 : On regroupe les N échantillons par groupe de n (avec $n|N$). On effectue un test par groupe en mélangeant le sang des n individus. Si le test d'un groupe est positif (au moins un cobaye est atteint...) on teste tous les échantillons du groupe.

1. On note X le nombre de groupes positifs. Préciser la loi de X.
2. Soit Y la variable aléatoire représentant le nombre de total de tests que l'on effectue en utilisant la deuxième méthode. Calculer l'espérance de Y.
3. Comparer cette espérance à la méthode 1 avec $N = 1000$, $n = 10$, $p = \frac{1}{1000}$.
4. Calculer la variance de Y.

Exercice 4
Un livre prêt à être édité contient 4 erreurs numérotées de 1 à 4. Il est relu par n relecteurs qui décèle chaque erreur (indépendamment les unes des autres) avec une probabilité de $\frac{1}{3}$ (où n est un entier naturel non nul). Les relectures sont également indépendantes.

1. Avec quelle probabilité la première erreur n'est pas décelée au cours des n relectures ?
2. Quelle est la probabilité pour que le livre soit entièrement corrigé à la fin du processus ? On note p_n cette probabilité.
3. Donner une condition suffisante sur n pour que $p_n \geqslant \frac{9}{10}$.
4. On note X_n le nombre d'erreur corrigé au cours de la relecture. Donner la loi de X_n.
5. Calculer l'espérance et la variance de X_n ainsi que leurs limites quand $n \to +\infty$.
6. (a) Calculer la probabilité pour que la première erreur soit décelée exactement par le n-ième relecteur.

   (b) Soit $p \in]0,1[$. Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1} (1-p)^{n-1}p$ converge et calculer sa somme. Donner une interprétation possible pour notre cas d'étude.