Table des matières

I Probabilités

I.1 Les définitions

I.1.1 Définition

On appelle univers **l'ensemble** des issues (ou résultats possibles) d'une expérience aléatoire. Dans ce cours, on ne considère que des univers finis. On le note souvent Ω.

Un événement est **une partie** (un sous ensemble) de Ω, qui représente un ensemble d'issues "favorables".

Un événement élémentaire est un événement à un seul élément (un singleton).

I.1.2 Définition

Soient A, B deux événements de l'univers Ω.

1. L'événement A et B est $A \cap B$.
2. L'événement A ou B est $A \cup B$.
3. On dit que A et B sont incompatibles ssi $A \cap B = \emptyset$.

I.1.3 Définition

Soit Ω un univers. On dit que $A_1, \dots, A_n$ est un système complet d'événements ssi $\bigcup_i A_i = \Omega$ et cette réunion est disjointe ie les A_i sont disjoints 2 à 2

I.1.4 Définition

Soit Ω un univers. On appelle probabilité sur Ω une fonction $\mathbb{P}$ définie sur les événements $\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \to [0, 1]$ qui vérifie pour tout $A, B \subset \Omega$

$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$$

et en plus $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.

Le couple $(\Omega, \mathbb{P})$ est appelé espace probabilisé. On se place maintenant dans le cadre d'un tel espace et on conserve ces notations.

I.1.5 Définition

1. Soient A, B deux événements. On dit qu'ils sont équiprobables ssi $\mathbb{P}(A) = Prob(B)$.
2. La probabilité $\mathbb{P}$ est dite uniforme si tous les événements élémentaires sont équiprobables.

I.1.6 Définition

Soit B un événement dans Ω tel que $\mathbb{P}(B) > 0$ (ie $\mathbb{P}(B) \neq 0$).

Pour tout événement A on appelle probabilité conditionnelle de A sachant B le nombre $\frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{P(B)}$ et on la note $\mathbb{P}(A|B)$ ou $\mathbb{P}_B(A)$

I.1.7 Définition

Soient A, B deux événements. On dit que A et B sont indépendants ssi $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.

I.1.8 Définition

Soient $A_1, \dots, A_n$ des événements. On dit qu'ils sont mutuellement indépendants ssi

$$\forall I \subset [\![1, n]\!] \ \mathbb{P}(\bigcap_{i \in I} A_i) = \prod_{i \in I} \mathbb{P}(A_i)$$

I.2 Calculs de probabilités

I.2.1 Proposition

On suppose que $\mathbb{P}$ est la probabilité uniforme. Soit A un événement.

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\mathrm{Card}(A)}{\mathrm{Card}(\Omega)}$$

Premier outil : le dénombrement !

I.2.2 Proposition

Soient A, B deux événements.

1. $\mathbb{P}(A \backslash B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B)$
2. $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$
3. $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$

Pour le calcul des probabilités d'intersections d'événements, on dispose de plusieurs outils :

I.2.3 Théorème (Formule des probabilités composées)
On considère $A_1, \dots, A_n$ des événements tels que $\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}) > 0$ (ie on a pris $n \geqslant 2$).

Alors

$$\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}_{A_1}(A_2)\mathbb{P}_{A_1\cap A_2}(A_3)\dots\mathbb{P}_{A_1\cap\cdots\cap A_{n-1}}(A_n)$$

Bien noter le cas le plus simple (dans le cas où la formule a du sens) :

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A|B) \times \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A)$$

On en déduit :

I.2.4 Théorème (Formule des probabilités totales)
Soit $(A_1, \dots, A_n)$ un système complet dévénement de probabilités toutes non nulle. Soit B un événement. Alors $\mathbb{P}(B) = \sum\limits_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}_{A_i}(B) = \sum\limits_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B|A_i)\mathbb{P}(A_i)$.

En particulier, si $\mathbb{P}(A) \in]0,1[$, alors $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}\left(B|\overline{A}\right)\mathbb{P}(\overline{A})$.

I.2.5 Théorème (Formule de Bayes)
Soit B un événement tel que $\mathbb{P}(B) > 0$.

1. Soit A un événement tel que $\mathbb{P}(A) > 0$. $\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}$.
2. Soit $(A_1, \dots, A_n)$ un système complet dévénements de probabilités toutes non nulle.
$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A)}{\sum\limits_{j=1}^{n} \mathbb{P}(B|A_j)\mathbb{P}(A_j)}$$

On utilise très souvent la deuxième forme, c'est à dire que l'on calcule $\mathbb{P}(B)$ par la formule des probabilités totales.

Le dernier outil, encore plus simple pour les intersections : les événements indépendants.

II Variables aléatoires

II.1 Loi d'une variable

II.1.1 Définition
Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Une variable aléatoire sur Ω est une fonction $X : \Omega \to E$ où E est un ensemble.

Lorsque $E \subset \mathbb{R}$, on dit que X est une variable aléatoire réelle. En pratique, il faut **TOUJOURS** commencer par rappeler/trouver E et surtout $X(\Omega)$ l'ensemble des valeurs que peut prendre la variable aléatoire.

II.1.2 Probabilité de valeurs

On note $\mathbb{P}(X \in A)$ la probabilité de l'événement $(X \in A) = X^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega |\ X(\omega) \in A\}$. Si A est le singleton $\{x\}$, on note plutôt $\mathbb{P}(X = x)$.

Si de plus X est à valeurs réelle, on peut considérer $A = E \cap]-\infty, x]$ l'ensemble des éléments de E qui sont $\leqslant x$. On note $(X \leqslant x)$ cet événement. Evidemment, cette définition peut s'étendre aux autres symboles de comparaison.

L'application $\left\{\begin{array}{ccc} X(\Omega) & \to & [0,1] \\ x & \mapsto & \mathbb{P}(X = x) \end{array}\right.$ est appelée loi de la variable X.

II.1.3 Proposition
Soit X une variable aléatoire. Les événements $(X = x)$ pour $x \in X(\Omega)$ forment un système complet d'événements de Ω.

II.1.4 Définition
On considère deux variables aléatoire X, Y définies sur un même univers fini Ω. La variable aléatoire $\left\{\begin{array}{ccc} \Omega & \to & X(\Omega) \times Y(\Omega) \\ \omega & \mapsto & (X(\omega), Y(\omega)) \end{array}\right.$ est notée (X, Y) et sa loi est appelée loi conjointe de X et Y.

Pour $x, y \in X(\omega) \times Y(\Omega)$ on a $\mathbb{P}((X,Y) = (x,y)) = \mathbb{P}((X = x) \text{ et } (Y = y)) = \mathbb{P}(X = x, Y = y)$

La loi de X est alors appelée première loi marginale et la loi de Y deuxième loi marginale.

En pratique, on peut présenter la loi conjointe dans un tableau à double entrées.

II.1.5 Définition
Soient X, Y deux variables aléatoires sur Ω. On dit qu'elles sont indépendantes ssi $\forall x, y \in X(\Omega) \times Y(\Omega) \mathbb{P}(X = x, Y = y) = \mathbb{P}(X = x)\mathbb{P}(Y = y)$ ie ssi les événements $(X = x)$ et $(Y = y)$ sont deux à deux indépendants pour toutes les valeurs possibles de x et y.

II.1.6 Proposition
Soient X, Y deux variables indépendantes et $A \subset X(\Omega), B \subset Y(\Omega)$. Alors $\mathbb{P}((X,Y) \in A \times B) = \mathbb{P}(X \in A) \times \mathbb{P}(Y \in B)$.

II.1.7 Définition
Soit $X_1, \dots, X_n$ n variables aléatoires sur Ω. On dit qu'elles sont mutuellement indépendantes ssi $\forall x_1 \in X_1(\Omega), \dots, x_n \in X_n(\Omega) \mathbb{P}(X_1 = x_1 \text{ et } \dots \text{ et } X_n = x_n) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i = x_i)$.

II.1.8 Proposition
Si X, Y sont des variables aléatoires indépendantes et si on peut calculer $f(X)$ et $g(Y)$ pour des fonctions f et g alors $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes.

II.2 Moments

II.2.1 Définition
Soit X une variable aléatoire réelle. On appelle espérance de X et on note $E(X)$ le nombre $\sum_{x \in X(\Omega)} x \times \mathbb{P}(X = x)$. Elle ne dépend que de la loi de X.

On dit que X est **centrée** ssi $E(X) = 0$.

II.2.2 Proposition
Si on connaît tous les événements élémentaires de l'univers et les valeurs de X qui correspondent, on peut utiliser le résultat suivant :

Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire. Alors $E(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)\mathbb{P}(\{\omega\})$.

II.2.3 Proposition (Propriétés de l'espérance)
Soient X, Y deux variables aléatoires réelles sur Ω.

1. Linéarité. Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. $E(\lambda X + \mu Y) = \lambda E(X) + \mu E(Y)$.
2. Positivité : si $X \geqslant 0$ alors $E(X) \geqslant 0$.
3. Croissance. Si $\forall \omega \in \Omega\ X(\omega) \leqslant Y(\omega)$ (que l'on note $X \leqslant Y$) alors $E(X) \leqslant E(Y)$.

II.2.4 Théorème (Théorème de transfert)
Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire et f une fonction définie sur $X(\Omega)$.

Alors $E(f(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x)\mathbb{P}(X = x)$. Ainsi l'espérance de $f(X)$ est déterminée par la loi de X.

II.2.5 Proposition
Soient X, Y deux variables aléatoires réelles sur Ω. SI elles sont indépendantes, ALORS $E(XY) = E(X)E(Y)$.

II.2.6 Définition
Soit X une variable aléatoire réelle. On appelle variance de X la quantité

$$V(X) = E((X - E(X))^2) \in \mathbb{R}^+.$$

L'écart type de X est $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.
On dit que X est réduite ssi $V(X) = \sigma(X) = 1$

II.2.7 Proposition
Soit X une variable aléatoire réelle.

Alors $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$ (on en déduit d'ailleurs que $E(X^2) \geqslant E(X)^2$)

II.2.8 Proposition
Soit X une variable aléatoire réelle et $a, b \in \mathbb{R}$. $V(aX+b) = a^2 V(X)$.

II.2.9 Proposition
Si X et Y sont des variables réelles indépendantes, $V(X+Y) = V(X) + V(Y)$.

II.3 Lois usuelles

II.3.1 Définition
Soit E un ensemble fini et $X : \Omega \to E$ une VA. On dit que X suit la loi uniforme sur E (on note $\mathcal{U}(E)$ cette loi) ssi $\mathbb{P}(X = x) = \frac{1}{|E|}$ pour tout $x \in E$.

Interprétation : modélise un choix “au hasard” dans un ensemble à n éléments.

II.3.2 Définition
Soit $p \in [0,1]$ un nombre fixé. Soit $X : \Omega \to \{0,1\}$ une variable aléatoire. On dit que X suit la loi de Bernoulli de paramètre p (notée $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$) ssi $\mathbb{P}(X=1) = p, \mathbb{P}(X=0) = 1-p$.

Interprétation : modélise le succès (de probabilité p) ou l'échec d'une expérience.

II.3.3 Définition
Soit $p \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}$ non nul. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $[\![0,n]\!]$. On dit que X suit la loi binomiale de paramètre n et p (noté $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$) ssi

$$\forall k \in [\![0,n]\!] \mathbb{P}(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Interprétation : modélise le **nombre de succès** dans la répétition de n expériences indépendantes, chacune ayant une probabilité p de réussite. X est donc la somme de n variables de Bernoulli indépendantes de paramètre p.

Nom	Notation	Valeurs	Loi	Espérance	Variance
Bernoulli	$\mathcal{B}(p)$	$\{0,1\}$	$\mathbb{P}(X=1) = p, \mathbb{P}(X=0) = 1-p$	p	$p(1-p)$
Binomiale	$\mathcal{B}(n,p)$	$[\![0,n]\!]$	$\mathbb{P}(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$	np	$np(1-p)$