I Géométrie du plan et de l'espace

Exercice 1
Soit $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ et $\mathcal{D} : -\sin(\theta)x + \cos(\theta)y = 0$ une droite du plan.

1. Donner une interprétation de θ. Pourquoi le choisir dans $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$?
2. Calculer la matrice dans la base canonique de s, la symétrie orthogonale par rapport à $\mathcal{D}$.

Exercice 2
Pour a, b deux nombres complexes, on considère la fonction $f_{a,b}$ définie sur $\mathbb{C}$ par

$$f_{a,b}(e) = az + b\overline{z}.$$

On considère également la fonction $g_{a,b}$ qui à tout vecteur $u \in \mathbb{R}^2$ d'affixe complexe z associe le vecteur v d'affixe complexe $f_{a,b}(z)$.

1. Montrer que $g_{a,b}$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$.
2. (Bonus) On note $G = \{g_{a,b};\ (a,b) \in \mathbb{C}^2\}$. Montrer que G est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel puis que $G = \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$. On pourra s'intéresser à la famille $(g_{1,0}, g_{i,0}, g_{0,1}, g_{0,i})$.
3. Reconnaître sans justification $g_{a,b}$ lorsque que :

   (a) $a \in \mathbb{R}^*,\ b = 0$.
   (b) $a = e^{i\theta},\ b = 0$ où $\theta \in \mathbb{R}$.
   (c) $(a,b) = (0,1)$.

4. Trouver l'ensemble des points fixes de $g_{a,b}$ où $a = 0, b = e^{i\theta}$.

Exercice 3
Soit $\mathcal{P} : 2x - y + z = 0$ un plan de l'espace et $\vec{u} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$. Donner les coordonnées du projeté orthogonal de $\vec{u}$ sur $\mathcal{P}$ ainsi que celles de son symétrique orthogonal par rapport à $\mathcal{P}$.

On note s la symétrie orthogonale par rapport à $\mathcal{P}$. Montrer que la matrice de s dans la base canonique est symétrique et que ses colonnes forment une base orthonormée indirecte de l'espace.

Exercice 4

1. Soient A, B deux points de l'espace. Décrire $E = \{M \in \mathbb{R}^3,\ d(A,M) = d(B,M)\}$.
2. Soient A, B, C, D 4 points non coplanaires de l'espace. Montrer qu'il existe un unique point Ω à égale distance de A, B, C, D.

II Exercices d'application

Exercice 5
Montrer que

$$\varphi : (P,Q) \mapsto \langle P \mid Q \rangle = \int_0^\pi \sin x \cdot P(x) \cdot Q(x)\,\mathrm{d}x$$

définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$. En est-il de même de

$$\psi : (P,Q) \mapsto \int_0^\pi \cos x \cdot P(x) \cdot Q(x)\,\mathrm{d}x\ ?$$

Exercice 6
Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ muni de son produit scalaire canonique, on considère
$v = (0,3,1,-1)$ et $w = (1,2,-1,1)$. Soit $F = \mathrm{Vect}(v,w)$
Déterminer une base orthonormale de $F^\perp$

Exercice 7
Soit $x_1, x_2, ..., x_n$, $n \in \mathbb{N}^*$, des réels strictement positifs de somme 1. Montrer qu'alors $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k} \geqslant n^2$.

Exercice 8

1. Montrer que l'application $\varphi : (P,Q) \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{n} P(k)Q(k)$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Pour $n = 2$, construire une base orthonormale à partir de la base $(1, X, X^2)$.

Exercice 9
Montrer que $(A,B) \mapsto \mathrm{tr}({}^tAB)$ est un produit scalaire sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$

1. La base canonique de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ est-elle orthonormale vis-à-vis de ce produit scalaire ?
2. Montrer que l'ensemble des matrices symétriques $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et l'ensemble des matrices antisymétriques $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont des sous-espaces supplémentaires orthogonaux pour ce produit scalaire.
3. Déterminer la projection orthogonale d'une matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ sur $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 10
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et E un espace euclidien. Soit $a \in E$ un vecteur unitaire. On pose φ_α : $\left\{\begin{array}{ccc} E & \to & E \\ x & \mapsto & x + \alpha\langle a|x\rangle a \end{array}\right.$.

1. Vérifier que φ_α est linéaire et donner ses éléments propres.
2. Vérifier que pour $x, y \in E$, $\langle \varphi_\alpha(x)|y\rangle = \langle x|\varphi_\alpha(y)\rangle$. Traduire ceci en terme de matrices dans une base orthonormée de E.
3. Peut-on avoir $\varphi_\alpha \in O(E)$? Caractériser géométriquement φ_α dans ce cas.

III Exercices d'approfondissement

Exercice 11
Soit E un espace euclidien de dimension n rapporté à une base orthonormée $\mathcal{B}$, et $\overrightarrow{u}$ un vecteur unitaire de E.

1. Montrer que la matrice de la projection orthogonale sur $\mathcal{D} = \text{Vect}\,(\overrightarrow{u})$ relativement à la base $\mathcal{B}$, est $U\,{}^tU$, où U est la matrice colonne des coordonnées de $\overrightarrow{u}$ relativement à $\mathcal{B}$.

2. En déduire la matrice de la projection orthogonale sur le plan $\mathcal{P} : x + y + z = 0$ de l'espace euclidien usuel $\mathbb{R}^3$ rapporté à sa base canonique.

Exercice 12
Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0, \pi]$. On le munit du produit scalaire

$$(f \mid g) = \int_0^{\pi} f(t)g(t)\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que la famille $(\cos, \sin)$ est une famille libre de E.
2. Construire une orthonormalisée de cette famille par la méthode de Schmidt.
3. Déterminer $\displaystyle\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^{\pi} (a\cos t + b\sin t - t)^2\,\mathrm{d}t$.

Exercice 13
Calculer $m = \displaystyle\min_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^{+\infty} (t^2 - at - b)^2 e^{-t}\mathrm{d}t$.

Indication : On rappelle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\mathrm{d}t = n!$ et on pourra considérer l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}[X]$ et l'application $\varphi : (f, g) \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)g(t)e^{-t}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 14
Soient U un vecteur unitaire de $\mathbb{R}^n$ et $A = I_n - 2U{}^tU$.

Montrer que A est orthogonale et déterminer la nature de l'endomorphisme canoniquement associé.

Exercice 15
Soit E un espace euclidien orienté de dimension 3, et $\overrightarrow{p}$ un vecteur unitaire de E. Soit

$$f : E \to E,\ \overrightarrow{u} \mapsto \overrightarrow{p} \wedge (\overrightarrow{p} \wedge \overrightarrow{u}).$$

1. Montrer que f est linéaire.
2. Déterminer le noyau et l'image de f.
3. Déterminer les éléments propres de f.
4. Interpréter géométriquement f.

Exercice 16
Soit $M = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ une matrice orthogonale. Montrer que $\left|\displaystyle\sum_{1\leq i,j\leq n} a_{ij}\right| \leq n$.

(on pourra écrire a_{ij} comme produit scalaire)

Exercice 17
Soit $M \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une unique matrice orthogonale O et une unique matrice triangulaire supérieure T dont les coefficients diagonaux sont strictement positifs tels que : $M = OT$

Matrices symétriques

Exercice 18
Soit $(a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ une matrice symétrique réelle d'ordre n de valeurs propres $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ (comptées avec leur ordre de multiplicité). Montrer que $\displaystyle\sum_{1\leq i,j\leq n} a_{ij}^2 = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2$.

Exercice 19
Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ telle que la matrice $B = A\,{}^tA - {}^tA\,A$ ait toutes ses valeurs propres positives. Montrer que $B = 0$.

Exercice 20
Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $B = A^3$. Montrer qu'il existe un polynôme P tel que $A = P(B)$.

Exercice 21
Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ inversible telle que

$${}^tA = A^{-1} + I_n.$$

1. Montrer que ${}^tAA$ est diagonalisable.
2. En déduire que A est diagonalisable.
3. Déterminer un polynôme annulateur de A, c'est-à-dire un polynôme P tel que $P(A) = 0$.
4. On suppose que A n'est pas une homothétie. Déterminer le spectre de A.