Devoir surveillé 3

Durée : 4H. Calculatrices interdites. **Les candidats sont invités à porter une attention particulière à la rédaction et la propreté : les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.**

Lisez l'énoncé attentivement et en entier **AVANT** de commencer le devoir.

Exercice 1 (Trigonométrie réciproque)
Les questions de cet exercice sont indépendantes les unes des autres.

1. On pose $A = \arcsin(\frac{4}{5})$ et $B = 2\arccos(\frac{1}{\sqrt{5}})$. Calculer $\sin(A)$ et $\sin(B)$ puis comparer A et B.
2. On pose $f : x \mapsto 2\arctan(e^x) - \arctan(\mathrm{sh}(x))$ et $g : x \mapsto \arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x})$.
   (a) Donner l'ensemble de définition et l'ensemble de dérivabilité de f.
   (b) Donner un expression très simple de f'. Qu'en conclure pour f ?
   (c) Reprendre les deux questions précédentes pour g.
   (d) On pose $A = 2\arctan(\frac{1}{2})$. Trouver $r \in \mathbb{Q}$ tel que $A = \arctan(r)$.
3. On pose maintenant $f : x \mapsto 2\arctan(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}})$.
   (a) Donner un tableau de signe de $x \mapsto \frac{1-x}{1+x}$ et le domaine de définition D de f.
   (b) Justifier que pour tout $x \in D$ il existe un unique $\theta \in [0, \pi[$ tel que $x = \cos(\theta)$.
   (c) Soit $t \in \mathbb{R}$. Factoriser $e^{it} + 1$ et $1 - e^{it}$ et en déduire une facorisation de $1 + \cos(t)$ et $1 - \cos(t)$.
   (d) Soit $x \in D$ et $\theta \in [0, \pi[$ tel que $x = \cos(\theta)$. Exprimer $f(x)$ en fonction de θ et donner une forme plus simple de f sur D.
4. On pose $z = \frac{(5+i)^4(1-i)}{239+i}$.
   (a) Calculer la forme algébrique du numérateur de z puis celle de z.
   (b) Donner les formes exponentielles de $5+i, 1-i, 239+i$. On utilisera de préférence la fonction arctan en cas de recours à la trigonométrie réciproque.
   (c) Déduire de la question précédente une expression de la forme exponentielle de z puis une autre expression en utilisant a).
   (d) Montrer la formule de Machin : $4\arctan(\frac{1}{5}) - \arctan(\frac{1}{239}) = \frac{\pi}{4}$.

Exercice 2
On souhaite résoudre l'équation $(E) : x^3 - 12x - 8 = 0$.

Partie I

Commençons par étudier le nombre de solutions réelles. On pose $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^3 - 12x - 8 \end{array} \right.$

1. Donner un tableau de variations de f incluant les limites en $+\infty$ et $-\infty$.
2. Combien l'équation (E) possède-t-elle de solution(s) réelle(s) ?
3. Tracer la courbe représentative de f en faisant apparaître les éventuelles tangentes horizontales.

Partie II

1. Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Rappeler les formules de linéarisation (transformation de produit en somme) pour $\cos^2(a)$ et $\cos(a)\cos(b)$.
2. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Montrer que $\cos^3(\theta) = \frac{1}{4}\cos(3\theta) + \frac{3}{4}\cos(\theta)$.
3. On cherche les solutions de E sous la forme $x = a\cos(\theta)$ où $a, \theta \in \mathbb{R}$. Récrire l'équation (E) grâce à la question précédente.
4. Trouver une valeur de a qui ramène l'équation (E) à une équation de la forme $\cos(3\theta) = K$ où K est un réel fixé que l'on précisera.
5. Trouver les solutions de (E).
6. Question bonus : Calculer $\int_0^\pi \cos^3(t)\mathrm{d}t$.

Exercice 3
Rappelons que pour un complexe $z = x + iy$ sous forme algébrique, $e^z = e^x e^{iy}$ par définition.

On définit deux fonctions $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \frac{e^z+e^{-z}}{2} \end{array} \right.$ et $g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \frac{e^z-e^{-z}}{2} \end{array} \right.$

1. On donne l'encadrement $\frac{8}{3} \leqslant e \leqslant \frac{11}{4}$. Donner un encadrement de $f(1)$ et $g(1)$ sous forme de fractions réduites.
2. Re-démontrer que pour $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$.
3. Soit $z \in \mathbb{C}$. Calculer $f(z)^2 - g(z)^2$.
4. Soient $x, \theta \in \mathbb{R}$. Que valent $f(x), g(x), f(i\theta), g(i\theta)$? Retrouver deux formules trigonométriques importantes déduites de la question précédente.
5. Montrer que $\overline{(f(z))} = f(\bar{z})$.
6. On pose $z = x + iy$ la forme algébrique de z. Montrer que $|f(z)|^2 = \frac{\mathrm{ch}(2x)+\cos(2y)}{2}$.
7. Peut-on avoir $f(z) = 0$? Si oui, précisez les valeurs de x, y correspondantes.
8. Avec les mêmes notation, résoudre $g(z) = 0$.
9. Soient $a, b \in \mathbb{C}$. Que vaut $f(a)g(b) + f(b)g(a)$?
10. Même question pour $f(a)f(b) + g(a)g(b)$.
11. Quelles sont les formules de trigonométrie circulaire et hyperbolique ainsi obtenues ?

Exercice 4
On considère l'équation $(E) : (1-z)^5 = (1+z)^5$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

1. Préliminaires trigonométriques :
   (a) On note $\alpha = \tan(\frac{\pi}{5})$. Exprimer $\cos^2(\frac{\pi}{5})$ et $\sin^2(\frac{\pi}{5})$ en fonction de α.
   (b) Exprimer $\cos(\frac{2\pi}{5})$ en fonction de α.
2. Voici une première méthode de résolution.
   (a) Enoncer le théorème du binôme de Newton.
   (b) Développer l'équation (E) et prouver que $(E) \iff z(az^4 + bz^2 + c) = 0$ pour $a, b, c \in Z$ à déterminer (on pensera à simplifier l'équation si possible).
   (c) Résoudre (E). On trouvera 5 solutions $0, \pm z_1, \pm z_2$ avec $0 < |z_1| < |z_2|$.
3. On va résoudre d'une autre manière. Pour $k \in \mathbb{Z}$, on note $\omega_k = e^{\frac{2ik\pi}{5}}$.
   (a) Pour les valeurs de k convenables (que vous préciserez), calculer $\frac{1-\omega_k}{1+\omega_k}$.
   (b) Sans développer, prouver que les solutions de (E) sont les $i\tan(\frac{k\pi}{5})$ pour $k \in [\![0, 4]\!]$.
   (c) Justifier que $i\tan\frac{\pi}{5} = z_1$.
   (d) En déduire la valeur de $\cos(\frac{2\pi}{5})$. On pensera à utiliser la quantité conjuguée pour se débarasser des racines au dénominateur.

Nous sommes maintenant armés pour construire le fameux pentagone régulier !