Espace préhilbertiens

— Produit scalaire dans un espace vectoriel : définition. Exemples dans $\mathbb{R}^n, \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \mathcal{C}([a,b,\mathbb{R}]), \mathbb{R}[X]$.

— Norme. Lien avec le produit scalaire : $\|u+v\|^2$ et identité de polarisation. Inégalité de Cauchy-Schwartz et triangulaire.

— Orthogonalité : liberté d'une famille orthogonale de vecteurs non nuls. Théorème de Pythagore.

— Bases orthonormées : calcul des coordonnées par produit scalaire. Procédé de Gram-Schmidt.

— Espaces orthogonaux, supplémentaire orthogonal d'un espace de dimension finie.

— Projection et symétrie orthogonales. Théorème des moindres carrés.

— Isométries d'un espaces euclidien : définition, lien avec l'image d'une base orthonormée.

— Matrices orthogonales : définitions et propriétés, lien avec les bases orthonormées. Reconnaître la matrice d'une symétrie orthogonale. Note : les isométries du plan et de l'espace ne sont pas au programme de cette semaine.

— Déterminant des matrices orthogonales, bases directes et indirectes de $\mathbb{R}^n$. Le déterminant d'une famille ne dépend pas de la base orthonormée directe choisie pour le calculer.

— Matrices symétriques réelles : les espaces propres sont orthogonaux. Théorème spectral.

Révisions

— Développement en série de $\frac{1}{1-x}, -\ln(1-x), \ln(1+x), (1+x)^\alpha, e^x, \sin x, \cos x, \operatorname{ch} x, \mathrm{sh}$

— Théorème de croissance comparées.

— Lien entre équation d'une droite du plan, vecteur directeur et vecteur normal.

— Formules de trigonométrie.

Questions de cours

1. Montrer que $(A,B) \mapsto \operatorname{tr}({}^tAB)$ défini un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Montrer que $(f,g) \mapsto \int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t$ défini un produit scalaire sur $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$.
3. Pour f un endomorphisme d'un espace euclidien et $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E, on note $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$. f est une symétrie orthogonale ssi f est une isométrie et M est symétrique.