Espace préhilbertiens

- Produit scalaire dans un espace vectoriel : définition. Exemples dans $\mathbb{R}^n, \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \mathcal{C}([a, b, \mathbb{R}]), \mathbb{R}[X]$.
- Norme. Lien avec le produit scalaire : $\|u+v\|^2$ et identité de polarisation. Inégalité de Cauchy-Schwartz et triangulaire.
- Orthogonalité : liberté d'une famille orthogonale de vecteurs non nuls. Théorème de Pythagore.
- Bases orthonormées : calcul des coordonnées par produit scalaire. Procédé de Gram-Schmidt.
- Espaces orthogonaux, supplémentaire orthogonal d'un espace de dimension finie.
- Projection et symétrie orthogonales. Théorème des moindres carrés.
- Isométries d'un espaces euclidien : définition, lien avec l'image d'une base orthonormée.
- Matrices orthogonales : définitions et propriétés, lien avec les bases orthonormées. Reconnaître la matrice d'une symétrie orthogonale. Note : les isométries du plan et de l'espace ne sont pas au programme de cette semaine.
- Déterminant des matrices orthogonales, bases directes et indirectes de $\mathbb{R}^n$. Le déterminant d'une famille ne dépend pas de la base orthonormée directe choisie pour le calculer.
- Matrices symétriques réelles : les espaces propres sont orthogonaux. Théorème spectral.

Probabilités

- Révisions de 1ère année : événements, probabilité sur un univers fini. Indépendance et probabilités conditionnelles. Loi binomiale et de Bernoulli. Espérance et variance.

Révisions

- Développement en série de $\frac{1}{1-x}$, $-\ln(1-x)$, $\ln(1+x)$, $(1+x)^\alpha$, e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{ch} x$, $\operatorname{sh} x$
- Formules de trigonométrie.
- Définition d'une intégrale impropre convergente pour une fonction f définie sur $[a, b[$

Questions de cours

1. Pour f un endomorphisme d'un espace euclidien et $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E, on note $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$. f est une symétrie orthogonale ssi f est une isométrie et M est symétrique.
2. En admettant que les valeurs propres de $M \in S_n(\mathbb{R})$ sont réelles, montrer que deux espaces propres associés à des valeurs propres distinctes sont orthogonaux.
3. Donner la définition de : X suit une loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$ et montrer que pour $k, n \in \mathbb{N}$ non nuls, on a $\mathbb{P}(X > n+k | X > n) = \mathbb{P}(X > k)$.